A TEXT BOOK
OF
INTERMEDIATE GEOMETRY
IN TAMIL

BY

Dr. K. RANGASWAMI AIYER, M.A., M.SC. PH.D.
Associate Professor of Mathematics
And Member, Board of Studies in Mathematics etc.,
Annamalai University

AND

Dr. B. RAMAMURTI, M.A., D.SC.,
Formerly Lecturer in Mathematics, Annamalai University,
and Professor of Mathematics,
Govt. College, Ajmere.

WITH A FOREWORD BY

Dr. A. NARASINGA RAO, M.A., L.T., D.SC., F.I.A.SC.,
Head of The Mathematics Department
And Dean, Faculty of Science,
Annamalai University.

WITH COURAGE AND FAITH

PRINTED AT
THE TRICHINOPOLY UNITED PRINTERS LIMITED
AND PUBLISHED BY
ANNAMALAI UNIVERSITY
1950

வடிவ கணிதம்
(இண்டர்மீடியேட்)

டாக்டர் கி. ரெங்கஸ்வாமி அய்யர்,
எம். ஏ., எம். எஸ். ஸி., பி. ஹெச். டி.,
அண்ணாமலை சர்வகலாசாலை, கணித கூட்டுப் பேராசிரியர்,
கணிதப்பயிற்சி ஆலோசனை சபை அங்கத்தினர் etc.,

டாக்டர் பா. ராமமூர்த்தி, எம். ஏ., டி. எஸ். ஸி.,
சிலகாலம் அண்ணாமலை சர்வகலாசாலை கணித விரிவுரையாளர்,
ஆஜ்மேர் அரசாங்கக் கல்லூரி கணித பேராசிரியர்.

டாக்டர் ஆ. நரசிங்க ராவ்,
எம். ஏ., எல். டி., டி. எஸ். ஸி., எப். ஐ. ஏ. எஸ்ஸி., அவர்கள்
முன்னுரையுடன்

திருச்சிராப்பள்ளி யுனைடெட் பிரிண்டர்ஸ் லிமிடெட்டில்
அச்சிடப்பட்டு

அண்ணாமலை சர்வகலாசாலையாரால்
வெளியிடப்பட்டது.

1950

FOREWORD

The use of the vernacular instead of a half mastered foreign language as the medium of instruction in High Schools in this Presidency is a reform of the utmost significance whose full fruits are to be gathered in the years to come. Mathematics has gained even more than other subjects, for here the pupil's ability to follow closely every step of the chain of reasoning and his conviction of their inevitability is the very essence of the situation.

The Intermediate courses in our Universities are in many respects, more akin to the High School than to the Degree courses, and include topics which are part of the school curriculam in more advanced countries. It is also doubtful whether the average pupil who has passed his School Leaving Certificate Examination has a sufficient mastery of English to be able to change over immediately to instruction by lectures in English to huge classes. There is much in favour of a continuation of instruction in the vernacular or a quasi-vernacular medium in the Intermediate clases also, to temper the transition which, under present conditions, seems inevitable at the next stage. One of the difficulties in the way of offering instruction in Tamil in the Intermediate classes in the Annamalai University has been the lack of suitable text books, and the University has been for several years encouraging such publications in various subjects. This book is to be welcomed as the first one dealing with Intermediate Mathematics, and is written by two eminent scholars in Geometry who combine wide teaching experience with a good knowledge of Tamil. The text is written in a flowing style, unlike such first attempts

at scientific writing in the vernacular which, too often, betray evidences of being laboured translations from a foreign language. The geometrical material is correlated with algebraic calculations and trigonometric results were possible, and there are problems and exercises for the student.

May this book and the others that are to follow it foster the growth of mathematical knowledge in Tamil Nad and thus lay solid foundations for its scientific and industrial future.

Dr A. NARASINGA RAO,
M.A., L.T., D.SC., F.I.A.SC.,
Head of the Mathematics Department,
and Dean, Faculty of Science,
Annamalai University.

பாயிரம்

அண்ணாமலைப் பல்கலைக்கழக இண்டர்மீடியேட் பாட திட்டத்திற்குகந்த, தமிழில் எழுதப்பட்டுள்ள வடிவ கணித நூல் இதுவே முதலாவதாகும். இந்நூலில் உபயோகிக்கப்பட்டுள்ள கலைச்சொற்கள் பெரும்பாலும் சென்னை மாகாணத் தமிழ் சங்கத்தாரால் வெளியிடப்பட்ட தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை. ஆனால் சிற்சில இடங்களில், இத்தொகுதியில் தரப்படாத வேறு சொற்களும் தக்க காரணங்கண்டு உபயோகிக்கப்பட்டுள்ளன. இந்நூலைத் தயாரிப்பதற்கு உதவியும் ஊக்கமும் அளித்த அண்ணாமலைப் பல்கலைக்கழகத்திற்கும், இதற்கு முகவுரையெழுதி, இந்நூலை வெளியிட மிகுந்த சிரத்தை காட்டிய இப்பல்கலைக்கழகக் கணிதப்பகுதி தலைவரும் பேராசிரியருமான டாக்டர் நரசிங்க ராவ் அவர்களுக்கும் எங்கள் மனமார்ந்த நன்றியைத் தெரிவித்துக் கொள்ளுகிறோம். இந்நூல் எழுதி முற்றுப்பெற எங்களுக்கு உதவியளித்த ஸ்ரீ எம். வெங்கட்டராமன், ஸ்ரீ இ. எஸ். வரதராஜய்யர் இவர்களுக்கும், மற்ற நண்பர்களுக்கும், எங்கள் நன்றி உரியதாகும். முன் கூறியுள்ளபடி இத்துறையில் இதுவே முதன் முதலாக எழுதப்பட்டுள்ள தமிழ்ப் புத்தகமாதலின், இதில் சில குற்றங்கள் இருப்பது சாத்தியமே. அப்படி ஏதேனும் குற்றங்களிருந்து எங்கள் கவனத்திற்குக் கொண்டுவரப்படின் அவைகளை நிவர்த்தி செய்ய நாங்கள் கடமைப்பட்டுள்ளோம்.

ஆக்கியோர்.

எண்ணென்ப ஏனை எழுத்தென்ப இவ்விரண்டும்
கண்ணென்ப வாழும் உயிர்க்கு" —குறள்.

"வடிவ கணிதம் தெரியாத எவரும்
இங்கு நுழைய வேண்டுவதில்லை" —ப்ளேடோ.

வடிவகணித கலைச்சொற்கள்

Altitude = செங்கோடு
Ambiguous case = ஈரடிவகை
Angle = கோணம்
- acute = குறுங்கோணம்
- adjacent = அண்டைக்கோணம்
- alternate = மாற்றுக்கோணம்
- base = படுகைக்கோணம்
- complementary = நிமிர்க்குங்கோணம் (சம்பூரகம்)
- corresponding = இசைக்கோணம்
- exterior = வெளிக்கோணம்
- interior = உள்கோணம்
- obtuse = விரிகோணம்
- right செங்கோணம் = 90°
- straight = நேர்கோணம் = 180°
- supplementary = வீழ்கோணம் (அநுபூரகம்)
- vertical = உச்சிக்கோணம்
- vertically opposite = குத்தெதிர்கோணம்

Arc = வளைவு
Arm = புயம்
Axiom = அடிப்படை உண்மை
Axis — of symmetry = பிம்பரேகை
- radical = சமித்தொடுவரை ஆயம்

Base = படுகை
Bisect = இருகூறுக்கு
Bisector — internal = உள்சம வெட்டி
- external = வெளிச்சம வெட்டி

Centre = மையம்
- circum = சுற்றுமையம்
- ex = வெளிமையம்
- in = உள்மையம்
- nine points = நவமையம்

Centre – of gravity = கனமையம்

– ortho = துணைமையம்

Centroid = கனமையம்

Chord = நாண்

– common = பொது நாண்

– of contact = தொடு நாண்

Circle = வட்டம்

– circum = சுற்று வட்டம்

– concentric = பொதுமைய வட்டம்

– ex = வெளி வட்டம்

– in = உள் வட்டம்

– nine points = ஒன்பது புள்ளி வட்டம்

– polar = துணைவட்டம்

– semi = அரை வட்டம்

– touching internally = உள் தொடு

– externally = வெளித்தொடு

Circumference of a circle = வட்ட நேமி

Coaxal circles = பொது ஆயவட்டங்கள்

Coincide = ஒன்றுபடு, பொருந்து

Collinear = ஒருவரையினவான

Concur = ஒன்று கூடும்

Concyclic = ஒரேவட்ட நேமியிலமைந்த

Congruent = அடங்கலுமொத்த

Conjugate – points = துணைப்புள்ளிகள்

– lines = துணைக்கோடுகள்

Construction = வரைதல், நிர்மாணித்தல்

Contradictory to = முறண்பாடான

Converse = மறுதலை

Convex = குவிந்த

– polygon = குவிந்த பலகம்

Corresponding = ஒத்த, இசைந்த, உகந்த, நேரான

– points = நேர் புள்ளிகள்

Corralary – கிளைத்தேற்றம் (கி. தே.)

Curve = பாட்டை

Data = கொள்கை

Diameter = விட்டம்

Diagonal = மூலை விட்டம்

Enclose = அடை

Enunciation = கூற்று, கூறுபாடு

Equianguiar = சமகோணமுள்ள

Equilateral = சமபுயமுள்ள

— triangle = சமபுய முக்கோணம்

Equidistant = சமதூர

Extremum = ஈறுநிலைகள்

Figure = படம் (ப)

Harmonic property - இசைவிதப்பொருத்தம்

— section = இசைவிதத்துண்டித்தல்

Hexagon = அறுகோணம்

Hypotenuse = கர்ணம்

Hypothesis = கொள்கை

Identity = சர்வசாம்யம்

Inequality = சமனின்மை

Intercept = துண்டு

Intersect = ஊடறு

Inverse – points – இணைப்புள்ளிகள்

Isoceles triangle = இருபுயங்கள் சமமுள்ள முக்கோணம்

Limiting – points = எல்லைப் புள்ளிகள்

Line of centres – மையக்கோடு

Locus = இயங்குவழி

Maximum = மிகப்பெரிது (அ-ல்) மீப்பெரிது

Median = மையக்கோடு

Minimum = மிகச் சிறிது (அ-ல்) மீச்சிறிது

N – gon = n கோணம், n புயங்களுள்ள பலகம்

Non-corresponding points = மாற்புள்ளிகள்

Oblique = சாய்வான

Octogon = எண்கோணம்

Orthogonal circles = நேர்மை வட்டங்கள்

Orthotomic circle = பொதுநேர்மை வட்டம்

Parallel = இணையான

— curves = இணை பாட்டைகள்

— lines = இணைகோடுகள்

Parallelogram = இணைகரம்

Pedal (Simpson) line – ஸிம்ஸன் கோடு

Pedal triangle = அடிமுக்கோணம்
Pentagon = ஐங்கோணம்
Perpendicular st. line = குத்துக்கோடு
— bisector = நடுக்குத்துக்கோடு
Point = புள்ளி
— at infinity = நெடுபுள்ளி
Point circle = சூன்யவட்டம்
Point of contact = தொடுபுள்ளி
Point of trisection = முச்சரி கூறிடும் புள்ளி
Polor circle = துணை வட்டம்
Polar = துணைக்கோடு
Pole = துணைப்புள்ளி
Polygon = பலகம், பலகோணம்
— convex = குவிப்பலகம்
— reflex = விரிபலகம்
— regular = ஒழுங்கு பலகம், முறைப்பலகம்
Projection = வீழ்ச்சி
Proof = நிரூபணம்
Proportion = விகிதசாம்யம்
Quadrilateral = நாற்கோட்டம்
— cyclic = வட்டநாற்கோட்டம்
Radical axis = சமத்தொடுவரை ஆயம்
Radius = ஆரை
Ratio = விகிதம்
Rectangle = நீள்சதுரம்
Redutio-ad-absurdum = பிழைக்கொடுக்கம்
Rhombus = சாய்ந்த சதுரம்
Same species = ஓரிணையான
Sector of a circle = வட்டகோணம்சம்
Segment of a circle = வட்டப்பகுதி
— alternate = மாற்று வட்டப்பகுதி
— major = நெடுவட்டப்பகுதி
— minor = குறுவட்டப்பகுதி
Similar = வடிவொத்த

Tangent = தொடுவரை
  — direct = நேர்தொடுவரை
  — transverse = மாற்றொடுவரை
  — real = உண்மைத்தொடுவரை
  — imaginary = மாயத்தொடுவரை
Theorem = தேற்றம்
Transversal = குறுக்குவெட்டி
Trapezium = இணைவிஷமம்
Triangle = முக்கோணம்
  — equilateral = சமபுயமுக்கோணம்
  — scalene = விஷம முக்கோணம்
Trisect = முச்சரியாக்கு
Turning point = சுறுநிலை
Vertex = உச்சி, முனை

சுருக்கங்கள்

அ-து = அதாவது
கி.-தே = கிளைத் தேற்றம்
நி-ம். = நிரூபணம், நிர்மாணம்
ப. = படம்
அ-ல் = அல்லது

அத்தியாயம் I

பீடிகை

துண்டுகளும் அவற்றின் குறியீடுகளும்

ஒரு நேர்கோட்டின் A B என்ற துண்டை எடுத்துக்கொள்வோம். இத்துண்டை நாம் இதுவரையில் AB என்றும் BA என்றும் வித்தியாசமின்றிக் கூறியிருக்கிறோம். நவீன வடிவ கணிதத்தில் பெரும்பாலும் துண்டின் அளவோடு திசையையும் குறிப்பிடுவது அவசியமாக இருக்கிறது. அதாவது AB, BA என்ற துண்டுகள் ஒரே அளவுள்ளவைகளாக இருந்தபோதிலும் AB ன் திசை BA ன் திசைக்கு மாறாகவிருப்பதால் AB = − BA என்றும் அல்லது BA = − AB என்றும் குறிப்பிட வேண்டும். ஆகவே துண்டுகளின் அளவுகளோடு அவைகளின் திசையையும் ஒருங்கே குறிப்பிடுங்கால் ஒரு திசையுள்ள துண்டுகளுக்கு + குறியும் எதிர்த்திசையுள்ள துண்டுகளுக்கு − குறியும் பொருத்தவேண்டிய அவசியம் நன்கு விளங்குகிறது. ஆனால் வழக்கமாக இடப்புறமிருந்து வலப்புறம் செல்லும் திசைக்குறியுள்ள துண்டுகளுக்கே + குறி பொருத்துவது அனுசரிக்கப்பட்டு வருகிறது. இக்குறியீடு முறைகள் சம்பந்தப்பட்ட கீழ்க்கண்ட சர்வசாம்யங்கள் எளிதில் கிடைக்கக்கூடியவை.

A, B, C என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் எங்கிருந்தாலும்,

$$AC \equiv AB + BC$$

அக்கோட்டில் D மற்றுமோர் புள்ளியானால்

$$AB \cdot CD + AD.BC + CA \cdot BD \equiv 0$$

விகிதம் :—

AB என்ற துண்டில் P ஏதேனுமோர் புள்ளி. P, ABக்கு உட்புறமிருந்தால் AP, PB நேர்முகத் துண்டுகள். ஆகவே $\frac{AP}{PB}$ + குறியுள்ள விகிதம். ஆனால் P, AB க்கு வெளிப்புறமிருந்தால் AP, PB எதிர்முகத் துண்டுகள். ஆகவே $\frac{AP}{PB}$ − குறியுள்ள விகிதம். இதிலிருந்து எளிதில் கிடைக்கக்கூடியது வருமாறு :

AB என்ற துண்டைக் கொடுத்ததோர் விகிதத்தில் துண்டிக்கும் புள்ளி (P) யொன்றே; கொடுத்த விகிதம் + குறியுள்ளதாயின் P, ABக்கு உட்புறத்திலும் − குறியுள்ளதாயின் P, AB க்கு வெளிப்புறத்திலுமிருக்கும்.

இசைவிதப் பொருந்தம் :

AB என்ற துண்டை உட்புறமாக P லும், வெளிப்புறமாக Q லும் (மதிப்பைப் பொறுத்தமட்டில்) ஒரே விகிதத்தில் துண்டிக்கும் புள்ளிகள் ABஐ இசைவீதத்தில் துண்டிப்பதாகச் சொல்லப்படும். அல்லது PQ, AB யுடன் இசைவீதப் பொருத்தமுடையதாகச் சொல்லப்படும்.

அ-து. $\frac{AP}{PB} = \frac{l}{m}, \frac{AQ}{QB} = -\frac{l}{m}$

$l = m$ ஆனல், P, AB ன் மையப் புள்ளி; Q, AB ன் மேலுள்ள நெடுபுள்ளி

பாட்டை, பரப்பின் குறியீடு

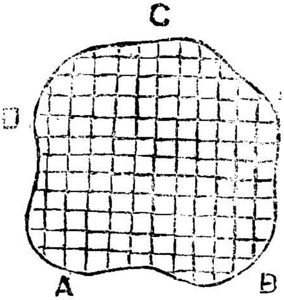
இதுவரை நாம் நேர்கோடுகளைப்பற்றியும் அவைகளின் துண்டுகளைப்பற்றியும் பேசிவந்தோம் இனி வளைந்த கோடுகளைப்பற்றியும் அவற்றின் துண்டுகளைப்பற்றியும் கவனிப்போம். தளத்திலுள்ள ஒரு வளைந்த கோட்டை ஒரு ஓடும் புள்ளியின் இயங்குவழியாகக் கருதுவது நியாயமே. ஆகவே, ஒரு வளைந்த கோட்டை இனி "பாட்டை" யெனக் கூறுவோம்.

XY என்ற பாட்டைத் துண்டின் முனைகள் ஒன்றுபடுங்கால் (ஒரு கம்பியை வளைத்து முனைகளை ஒன்றுசேர்ப்பது போல) அதை மூடுபாட்டை யென்போம். ஒவ்வொரு மூடுபாட்டையும் சிறிது பரப்பை யடைக்கும். படத்தில் கட்டமிட்ட பகுதி மூடுபாட்டை ABCD அடைக்கும் பரப்பாகும். ஒரு நேர்கோட்டின் துண்டிற்கு திசையும் குறியீடும் பொருத்துவதுபோல், ஒரு மூடுபாட்டைக்குத் திசையும் அப்பாட்டையடைக்கும் பரப்பிற்குக் குறியீடும் பொருத்தலாம். உதாரணமாக, படத்தில் கட்டமிருக்கும் பரப்பை மதிப்பைப் பொருத்தமட்டில் பரப்பு ABCDA என்றும் அல்லது பரப்பு ABCDA என்றும் கூறலாம். ஆனல் பரப்பு ABCDAக்கு

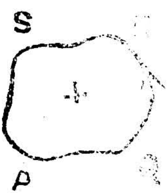
+ குறியும், பரப்பு ADCBAக்கு − குறியும் பொருத்துவது வழக்கமாக இருக்கிறது. ஆகவே

$$\text{பரப்பு } ABCDA = -\text{பரப்பு } ADCBA$$

பரப்பிற்குக் குறியீடு பொருத்த கீழ்க்கண்ட விதியை யனுசரிப்போம். அ.து



ப ; 1



ப ; 2

ப : 3

ஒரு மூடுபாட்டைக்கு இட்ட திசைக்குறி அப்பாட்டை யடைக்கும் பரப்பை இடம்வரும் திசைக் குறியாயின் பரப்பிற்கு + குறியும் வலம்வரும் திசைக்குறியாயின் − குறியும் பொருத்தவேண்டும். படம் 2 ல் பரப்பிற்கு + குறியும் படம் 3 ல் − குறியும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறதைக் கவனிக்க.

வடிவொத்தலும் அடங்கலுமொத்தலும்

இரு உருவங்கள் ஒன்றையொன்று வடிவத்தில் ஒத்திருப்பின் அவை வடிவொத்தவையென்றும், ஒன்று மற்றதின் பிரதியாயின் அவை அடங்கலுமொத்தவையென்றும் கூறுவோம்.

உ-ம் : இரு சமபுய முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை.
இரு சதுரங்கள் வடிவொத்தவை.

இரு முக்கோணங்களில் ஒன்றின் புயங்கள் முறையே மற்றதின் புயங்களுக்குச் சமமாயின், அம்முக்கோணங்கள் அடங்கலுமொத்தவை.

இணைபாட்டை, போன்மையம்

ஒரு நிலைப்புள்ளியையும் (O) ஒரு பாட்டை (C) மேலுள்ள ஓர் ஓடும் புள்ளியையும் (P) சேர்க்கும் துண்டைக் கொடுத்த

விகிதத்தில் $\frac{l}{m}$ துண்டிக்கும் புள்ளியின் (P′) இயங்குவழி மற்றுமோர் பாட்டை (C′). (P, P′) ஐ இப்பாட்டைகளைப் பொருத்த நேர் புள்ளிகள் என்போம்.

படத்தில் P, P′ ; Q Q′ இரு ஜோடி நேர் புள்ளிகள்

$$\therefore \frac{OP'}{OP} = \frac{l}{m} = \frac{OQ'}{OQ}$$

அத்தியாயம் II.

ஆரம்பத் தேற்றங்கள்

தேற்றம் 1.

i. XY, AB ஐ இசை வீதத்தில் துண்டித்தால், AB, XY ஐ இசை வீதத்தில் துண்டிக்கும்.

ii. (i)ல் O, AB ன் மையப் புள்ளியானால்
$OA^2 = OB^2 = OX \cdot OY$.

iii. {(ii)ன் மறுதலை} $OX \cdot OY = OB^2$ ஆனால் XY, AB இசை வீதப் பொருத்த முடையவை.

(i) :—நி-ம் : $\because \frac{AX}{XB} = \frac{AY}{BY}$

$$\therefore \frac{AX}{AY} = \frac{XB}{BY}$$

அ. து. $\frac{XB}{BY} = \frac{XA}{YA}$

(ii) :—நி-ம் ; $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{BY}$

$$\therefore \frac{AX + XB}{AX - XB} = \frac{AY + BY}{AY - BY}$$

$$\therefore \frac{2\,OB}{2\,OX} = \frac{2\,OY}{2\,OB}$$

$$\therefore OB^2 = OX \cdot OY.$$

(iii) :—(ii)ன் நிரூபிண முறையைக் கீழிருந்துமேல் தொடர (iii) எளிதில் கிடைக்கும்.

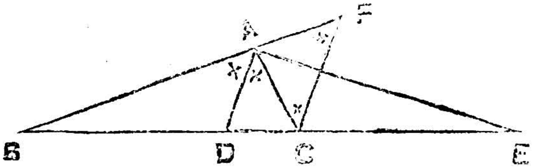
தேற்றம் 2

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு புயத்தை, எதிர் கோணத்தின் உள் சமவெட்டி உட்புறமாகவும் வெளிச் சமவெட்டி வெளிப் புறமாகவும் மற்றிரு புயங்களின் விகிதத்தில் துண்டிக்கும்.

△ ABCல் AD ∠Aன் உள் சமவெட்டி.

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ என்று நிரூபிப்போம்.

C வழியாக ADக்கு CF என்ற இணை கோடு வரைக.



ப : 4

நி-ம் :— ∵ AD ∥ FC

∴ ∠BAD = ∠AFC

∠DAC = ∠ACF

∴ ∠AFC = ∠ACF

∴ AF = AC

அன்றியும்,

∵ AD ∥ FC

∴ $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AF}$

அ.து $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$

இவ்வண்ணமே ∠A ன் வெளி சமவெட்டி BCஐ Eல் சந்தித்தால் $\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC}$ என்று நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம் 3 (2ன் மறுதலை)

ஒரு முக்கோணத்தின் புயமொன்றை உட்புறமாகவும் வெளிப்புறமாகவும் மற்றிரு புயங்களின் விகிதத்தில் துண்டிக்கும் புள்ளிகளை எதிர் முனையுடன் சேர்க்கும் கோடுகள் அம்முனைக்கோணத்தின் சமவெட்டிகளாகும்.

$$\triangle \text{ ABC ல், } \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}.$$

AD, AE, ∠ Aன் உள், வெளி சமவெட்டிகள் என்று நிரூபிப்போம்.

C வழியாக ADக்கு CF என்ற இணை கோடு வரை (படம் 4).

நி-ம் :— ∵ CF ∥ DA

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AF}$$

$$\text{ஆனால் } \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$$

$$\therefore AE = AC$$

$$\therefore \angle AFC = \angle ACF$$

அன்றியும்,

CE ∥ DA

$$\therefore \angle DAC = \angle ACE, \angle BAD = \angle AFC$$

$$\therefore \angle BAD = \angle DAC.$$

அ-து, AD, ∠ Aன் உள் சமவெட்டி இவ்வண்ணமே AE ∠ Aன் வெளிச் சமவெட்டி என்று நிரூபிக்கலாம்.

கி-தே : (i) ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு புயத்தை எதிர் கோண சமவெட்டிகள் இசை வீதத்தில் துண்டிக்கின்றன.

கி-தே (ii) :—ஒரு முக்கோணத்தின் படுகையும், மற்றிரு புயங்களின் விகிதமும் கொடுத்திருப்பின், சிகரத்தின் இயங்கு வழி ஓர் வட்டம். (அத்தியாயம் VI தேற்றம் 3 ஐ பார்க்க).

தேற்றம் 4

ABC என்ற முக்கோணத்தின் $\angle A$ன் உள், வெளிசமவெட்டிகள் BC ஐ முறையே D, D′ல் சந்தித்தால்

(i) $AB.\ AC = AD^2 + BD.\ DC$

(ii) $AB.\ AC = BD'.\ CD' - AD'^2$.

நி-ம் :—

(i) AD, $\triangle$ ABC ன் சுற்று வட்டத்தை E ல் சந்திக்கட்டும்.

$\therefore$ $\triangle$ ள் ABD, AECல்

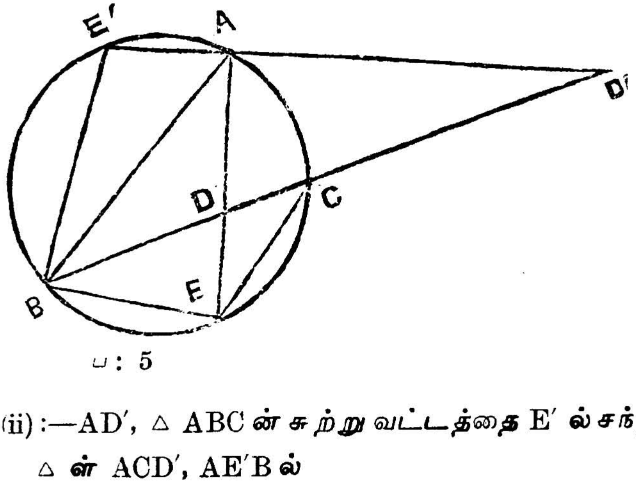
$\angle BAD = \angle EAC$,

$\angle ABD = \angle AEC$ (ABEC ஒரே வட்டநேமியி லிருப்பதால்)

$\therefore$ $\triangle ABD \, ||| \, \triangle AEC$.

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$$

$$\therefore AB.\ AC = AD.\ AE = AD\,(AD + DE)$$
$$= AD^2 + AD.\ DE$$
$$= AD^2 + BD.\ DC.$$



ப : 5

(ii) :—AD′, $\triangle$ ABC ன் சுற்று வட்டத்தை E′ ல் சந்திக்கட்டும்.

$\triangle$ ள் ACD′, AE′B ல்

$\angle BAE' = \angle CAD'$ ($\because$ AD′ வெளிசம வெட்டி)

$\angle BE'A = \angle ACD'$ ($\because$ BE′AC ஒரு வட்ட நாற்கோட்டம்)

$\therefore\ \triangle\ ACD' \parallel\!|\ \triangle\ AE'B.$

$$\therefore\ \frac{AC}{AD'} = \frac{E'A}{AB}$$

$$\therefore\ AB.\ AC = E'A.\ AD'$$

$$(E'D' - AD')\ AD'$$

$$= E'D'.\ AD' - AD'^2$$

$$= BD'.\ CD' - AD'^2.$$

<u>கி-தே</u> : (i) $AD^2 = \dfrac{4bc\, s\,(s-a)}{(b+c)^2}$

$$\because\ \frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$$

$$\therefore\ \frac{BD}{BC} = \frac{c}{b+c},\quad \frac{DC}{BC} = \frac{b+c}{b}$$

$$\therefore\ BD = \frac{ac}{b+c},\ DC = \frac{ab}{b+c}$$

$$\therefore\ AD^2 = AB.\ AC - BD.\ DC$$

$$= bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$= \frac{bc\ (a+b+c)\ (b+c-a)}{(b+c)^2}$$

$$= \frac{4bc\ s(s-a)}{(b+c)^2}.$$

<u>கி-தே</u> (ii) $AD'^2 = \dfrac{4bc\ (s-b)\ (s-c)}{(b-c)^2}$

$$\because\ \frac{BD'}{CD'} = \frac{c}{b}$$

$$\therefore\ \frac{BD'}{BC} = \frac{c}{c-b},\quad \frac{CD'}{BC} = \frac{b}{c-b}$$

$$\therefore\ BD' = \frac{ac}{c-b},\ CD' = \frac{a-b}{cb}$$

$$\therefore\ AD'^2 = BD' - CD' - AB.\ AC$$

$$= \frac{a^2\ bc}{(c-b)^2} - bc$$

$$= \frac{bc}{(c-b)^2}(a-c+b)(a+c-b)$$

$$= \frac{4bc\,(s-b)\,(s-c)}{(b \sim c)^2}$$

பயிற்சிகள்

1. ABCD என்ற நாற்கோட்டத்தில் கோணங்கள் A, C ன் உள்சம வெட்டிகள் BD ல் சந்தித்தால், கோணங்கள் B, D ன் உள்சம வெட்டிகள் AC ல் சந்திக்கும்.

2. A, B, C ஒருவரையினவானவை. AB, BC, P என்ற புள்ளியில் சமகோணங்களை எதிர் வீழ்க்கும்படி P ஐக் கண்டுபிடி.

3. இரு வட்டங்களின், சந்தி புள்ளிகளொன்றி வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் மேலமையும் நாண்கள் கொடுத்த விகிதத்திலிருக்கும்படி, அக்கோட்டை வரைக.

4. ஒரு இணைகரத்தின் புயங்களும், மூலைவிட்டங்களின் விகிதமும் கொடுத்திருப்பின், இணைகரத்தை நிர்மாணிக்க.

5. ஒரு வட்டத்தின் இருவிட்ட முனைகளுடன் இசை வீதப் பொருத்தமுள்ள இரு ஜோடிப் புள்ளிகள் ஓர் வட்ட நேமியிலமையும்.

6. △ ABC ன் உட்புறத்தில் P என்ற புள்ளியை PA : PB : PC = $l : m : n$ ஆக இருக்கும்படி P ஐக் கண்டுபிடி.

$l : m : n = a^2 : b^2 : c^2$ ஆகின் P, எங்கிருக்கும் ?

தேற்றம் 5 (பிரும்மகுப்தா அல்லது டாலமி தேற்றம்)

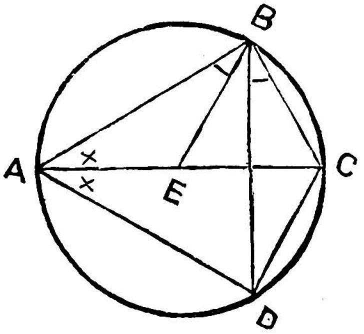
ஒரு வட்ட நாற்கோட்டத்தின் மூலைவிட்டங்களாலான நீள் சதுரத்தின் பரப்பு இரு ஜோடி எதிர் புயங்களாலான நீள் சதுரங்களின் மொத்தப் பரப்பிற்குச் சமம்.

ABCD ஒரு வட்ட நாற்கோட்டம்

AC. BD = AB. CD + AD. BC என்று நிரூபிப்போம்.

$\angle$ABE = $\angle$DBC ஆக இருக்கும்படி BE என்ற கோடு வரை.

நி-ம் :— △ ள் ABE, DBC ல்



ப : 6

$\angle$ABE = $\angle$DBC

$\angle$BAE = $\angle$BDC ($\because$ ABCD ஒரு வட்ட நாற்கோட்டம்)

$\therefore$ △ABE ||| △DBC

$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{CD}$

$\therefore$ AD. AE = AB. CD ....(i)

அன்றியும்,

△ ள் ABD, EBC ல்

$\angle$ABD = $\angle$EBC

$\angle$ADB = $\angle$ECB

$\therefore$ △ ABD ||| △ EBC

$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{EC}{BC}$

$\therefore$ BD. EC AD. BC ....(ii)

$\therefore$ (i), (ii) இவைகளைக் கூட்ட,

AC·BD = AB·CD + AD·BC.

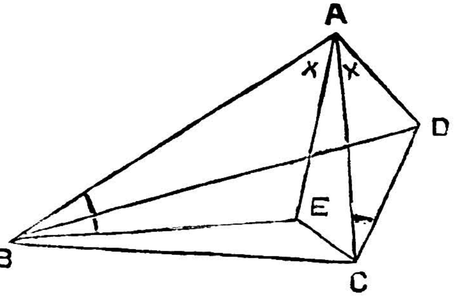
தேற்றம் 6

ஒரு விஷம நாற்கோட்டத்தின் மூலை விட்டங்களாலான நீள் சதுரத்தின் பரப்பு இரு ஜோடி எதிர் புயங்களாலான நீள் சதுரங்களின் மொத்தப் பரப்புக்குக் குறைவாகும்.

ABCD ஒரு விஷம நாற்கோட்டம். அ.து, A, B, C, D ஓர் வட்ட நேமியில் அமையா.

AC·BD < AB·CD + AD·BC என்று நிரூபிப்போம்.

$\angle ABE = \angle DBC$, $\angle BAE = \angle BDC$ ஆக இருக்கும்படி E ஐக் கண்டுபிடி.



ப : 7

$\because \triangle ABE \ ||| \ \triangle DBC$

$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{CD}$

$\therefore AE \cdot BD = AB \cdot CD$.................(i)

$\triangle$ ள் ABD, EBC ல்

$\angle ABD = \angle EBC$, $\frac{AB}{BD} = \frac{EB}{BC}$

$\therefore \triangle ABD \ ||| \ \triangle EBC$

$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{EC}{BC}$

$\therefore EC. BD = AD. BC$...............(ii)

(i), (ii) இவைகளைக் கூட்ட

$(AE + EC). BD = AB. CD + AD. BC$

ஆனால் $AC < AE + EC$.

$\therefore AC. ED < AB. CD + AD. AC$

கி-தே (i) படம் 7ல், ABCD வட்ட நாற்கோட்டமாயின் E, AC ன் மேலமையும். ஆகவே $AB. CD + AC. BD = (AE + EC). BD = AC. BD$

கி-தே (ii) நாற்கோட்டம் ABCD ல் (படம் 5) $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = x$, $BC = y$, என்றால் $x^2 y^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2\ abcd \cos(A + C)$ என்று நிரூபி.

கி-தே (iii) ஒரு வட்ட நாற்கோட்டத்தின் புயங்கள் a, b, c, d. மூலைவிட்டங்களைக் கண்டுபிடிக்க.

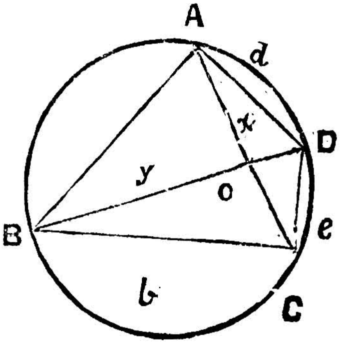
AC, BD, O ல் சந்திக்கட்டும்

$\triangle$ AOB ||| $\triangle$ DOC

$\therefore \dfrac{AO}{a} = \dfrac{DO}{c}$

$\triangle$ AOD ||| $\triangle$ COB

$\therefore \dfrac{AO}{d} = \dfrac{BO}{b}$



ப: 8

$$\therefore \frac{AO}{ad} = \frac{BO}{ab} = \frac{DO}{cd} = \frac{CO}{bc}$$

$$= \frac{AO+OC}{ab+cc} = \frac{BO+OD}{ab+cd}$$

$$= \frac{x}{ad+bc} = \frac{y}{ab+cd}$$

$$= \sqrt{\frac{xy}{(ap+bc)\ (ab+cd)}}$$

$$= \sqrt{\frac{ac+bd}{(ad+bc)\ (ab+cd)}} \quad (\therefore\ xy = ac+bd)$$

$= k$ (என்று வைத்துக்கொள்)

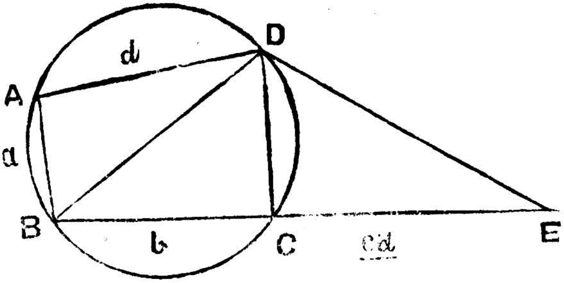
$$\therefore x = k\,(ad+bc) = \sqrt{\frac{xy\ (ad+bc)}{ad+cd}}$$

$$\therefore y = k\,(ab+cd) = \sqrt{\frac{xy\ (ab+cd)}{ad+bc}}$$

கி-தே (iii) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{ad+bc}{ab+cd}$.

கி-தே (iv) :—கொடுத்த புயங்களுள்ள ஒரு வட்ட நாற்கோட்டம் வரைக.

குறிப்பு :—



ப : 9

BC ன் நீட்சியில் CE = $\frac{cd}{a}$ ஆக இருக்கும்படி E ஐக் கண்டுபிடி.

$\triangle$ ள் DAB, ECD ல்

$$\frac{DA}{AB} = \frac{d}{a} = \frac{EC}{CD}$$

$$\angle DAB = \angle ECD$$

$$\therefore \triangle DAB \;|||\; \triangle ECD$$

$$\therefore \frac{BD}{DE} = \frac{a}{c}$$

B, E நிலைப்புள்ளிகள். ஆகவே D ன் இயங்குவழி ஓர் வட்டம். ஆனால் CD = c. ஆகவே D ஐக் கண்டுபிடி. பிறகு A ஐக் கண்டுபிடி.

பயிற்சிகள்

1. ABC என்ற சமபுய முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தில் P, வட்டவளைவு BC ல் A-க்கு எதிர் புறமிருக்குமோர் புள்ளி.

   நிரூபி : PB + PC = PA.

2. AB என்ற வட்டவளைவின்மேலுள்ள P என்ற புள்ளியின், முனை ஆரைகள் OA, OB ன் மேலுள்ள வீழ்ச்சிகள் முறையே C, D.

   நிரூபி : PC·OD + PD·OC = நிலையெண்.

3. ABCD ஒரு வட்ட நாற்கோட்டம். AE, BD க்கு இணை நாண்.

   நிரூபி : AB.BC + AD.DC = BD.CE.

4. △ ABC ன் புயங்களின் மேல் XBC, YCA. ZAB என்ற சமபுய முக்கோணங்கள் ABC க்கு வெளிப்புறமாக வரையப்படின்.

(i) AX, BY, CZ ஒன்று கூடும்.

(ii) AX = BY = CZ.

5. ABCD ஓர் இணைகரம். △ ABC ன் சுற்றுவட்டம் AD ஐ P ல் சந்தித்தால்.

$AB^2 - AC^2 = AP \cdot AD$ என்று நிரூபிக்க.

6. △ ABC ல் AB = AC. D சுற்றுவட்ட வளவு BC ன் மையப் புள்ளி ; P, அவ்வட்டவளைவின் மேலுள்ள ஓர் புள்ளி ; O சுற்று மையம்.

நிரூபி : PD.AB = AO (PB + AC)

7. ஒரு வட்டத்தில் AB நிலைத்த ஒரு நாண் ; DE, AB க்குச் செங்குத்தான விட்டம் ; P வட்டவளைவு AEB ல் ஓர் புள்ளி.

(PA + PB) / PD = நிலையெண் என்று நிரூபிக்க.

8. ஒரு வட்ட நேமியிலுள்ள இரு புள்ளிகள் வழியாக வரையப் படும் நாண்களாலான நீள் சதுரத்தின் பரப்பு கொடுத்ததாக இருக்கும்படி நாண்களை வரைக.

9. கொடுத்த புயங்களுள்ள ஒழுங்கு ஐகோணத்தின் மூலைவிட்டங் களைக் கண்டுபிடிக்க.

10. ஒரு வட்ட நாற்கோட்டத்தின் புயங்கள் முறையே a, b, c, d, சுற்றுவட்டத்தின் விட்டம் d யாயின்

$$d^3 = d\,(a+b+c) - 2\,abc$$

11. ABCD ஒரு வட்ட நாற்கோட்டம். AD, AB க்கு இணை கோடுகளான CE. CF ; AB, AD ஐ முறையே E, F ல் சந்தித்தால்

$AB.\ AE + AD.\ AF = AC^2$.

12. ஒரு விஷம முக்கோணம் ABC ன் மீப்பெரிய புயம் BC. P சுற்று வட்டநேமியில் A ன் எதிர் புறமிருக்குமோர் புள்ளி.

நிரூபி : PB + PC > PA.

13. △ ABC ன் உட்புறத்தில் P என்ற புள்ளியை PA + PB + PC மீச்சிறிதாகும்படி கண்டுபிடிக்க.

<u>தேற்றம் 7</u> (அபொலோனியஸ்)

ABC என்ற முக்கோணத்தில் D, BC ஐ $m : n$ என்ற விகிதத்தில் துண்டித்தால்.

$$nAB^2 + mAC^2 = (m+n)\,AD^2 + nBD^2 + mDC^2.$$

BC க்கு AE என்ற குத்துக்கோடு வரை. கோணங்கள் ADB, ADC ல் ஒன்று விரிகோணம், மற்றது குறுங் கோணம்; $\angle$ ADB விரிகோணமாக இருக்கட்டும் (படம் 10)

நி-ம் :—

$\triangle$ ADB ல்,

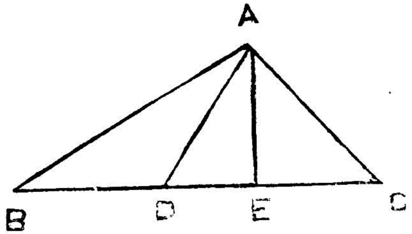
$$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2\,BD \cdot DE$$

$\triangle$ ADC ல்,

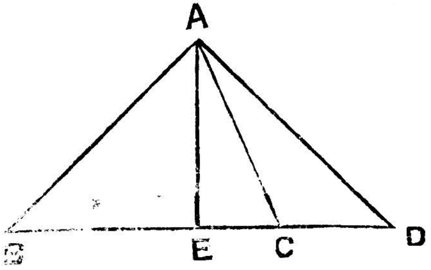
$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2\,DC, DE$$

$$\therefore\ nAB^2 + mAC^2 = (m+n)\,AD^2 + nBD^2 + mDC^2$$

$(\because\ BD : DC = m : n)$



ப : 10



ப : 11

குறிப்பு :—தேற்றம் 7 ஐ வருமாறு மாற்றியமைக்கலாம்.

(i) BD : DC = $m : n$ ஆனால்

$$m\,AB^2 + n\,AC = (m+n)\,AD^2 + \frac{mn}{m+n}\,BC^2.$$

(ii) $BD = \frac{1}{k}\,BC$ ஆனால்

$$(k-1)\,AB^2 + AC^2 = k\,AD^2 + \left(1 - \frac{1}{k}\right)BC^2.$$

கி-தே (i) D, BC-ன் மையப் புள்ளியானால் $m = n$. ஆகவே,

$$AB^2 + AC^2 = 2\,AD^2 + 2\,BD^2.$$

கி-தே (ii) $m : n$ என்ற விகிதத்தில் (படம் 11-லிருப்பதுபோல், வெளிப்புறமாகத் துண்டித்தால் $n\,AB^2 - m\,AC^2 = nBD^2 - m\,CD^2 + (n-m)\,AD^2$.

பயிற்சிகள்

1. ABC என்ற சமபுய முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட நேமியில் P ஓர் புள்ளியானால்

$$PA^2 + PB^2 + AC^2 = 2\,BC^2.$$

2. ஒரு இணைகரத்தின் புயங்களின் மேல் வரையப்படும் சதுரங்களின் மொத்த பரப்பு, மூலவிட்டங்களின் மேல் வரையப்படும் சதுரங்களின் மொத்த பரப்பிற்குச் சமம்.

3. மேலே, பயிற்சி 2 ன் மறுதலையை எழுதி நிரூபிக்க.

4. ஒரு நாற்கோட்டத்தின் புயங்களின்மேல் வரையப்படும் சதுரங்களின் மொத்த பரப்பிற்கும் மூலை விட்டங்களின்மேல் வரையப்படும் சதுரங்களின் மொத்த பரப்பிற்குமுள்ள வித்தியாசம், அம்மூலை விட்டங்களின் மையப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் மேலுள்ள சதுரத்தின் பரப்பைப்போல் நான்குமடங்காகும்.

5. △ ABC ன் கனமையம் G. P ஏதேனு மோர் புள்ளி.

நிரூபி : (i) $PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3\,PG^2.$

(ii) $PA^2 + PB^2 + PC^2$ கும் நிலையெண்ணுயின் P ன் இயங்குவழி ஓர் வட்டம்.

6. △ ABC ன் புயங்கள் முறையே a, b, c; உள் மையம் I P ஏதேனுமோர் புள்ளி-

நிரூபி : (i) $a.\,PA^2 + b.\,PB^2 + c.\,PC^2 = a.\,IA^2 + b.\,IB^2 + c.\,IC^2 + (a+b+c)\,IP^2$:

(ii) $a.\,PA^2 + b.\,PB^2 + c.\,PC^2$ ஓர் நிலையெண்ணுயின் P ன் இயங்குவழி I ஐ மையமாகக்கொண்ட ஓர் வட்டம்.

7. (i) △ ABC ன் உட்புறத்தில் O என்ற புள்ளியை △ BOC : △ COA : △ AOB = $l : m : n$ ஆக இருக்கும்படி கண்டுபிடி.

(ii) அன்றியும், P ஏதாவதொரு புள்ளியானால்,

$$l.\,PA^2 + m.\,PB^2 + n.\,PC^2 = (l+m+n)\,PO^2 + l.\,AO^2 + m.\,BO^2 + n.\,CO^2.$$

(iii) பயிற்சி 7ன் பகுதி (ii) லிருந்து மேலே (5), (6)ல் கொடுத்திருப்பவைகளை அனுமானிக்க.

அத்தியாயம் III.

ஒன்று கூடுதலும். ஒருவரைமையும்

வ-ரை : மூன்று அல்லது மூன்றுக்கு மேற்பட்ட கோடுகள் ஒரே புள்ளி வழியாகச் சென்றால் அவைகள் ஒன்று கூடு வதாகச் சொல்லப்படும்.

வரை : மூன்று அல்லது மூன்றுக்கு மேற்பட்ட புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலிமைந்தால், அவைகள் ஒருவரையினவான வையாகச் சொல்லப்படும்.

தேற்றம் 1 (சீவா)

ABC என்ற முக்கோணத்தின் புயங்களான BC, CA, ABன் மேல் முறையே D, E, F என்ற புள்ளிகள் இருக்கின்றன.

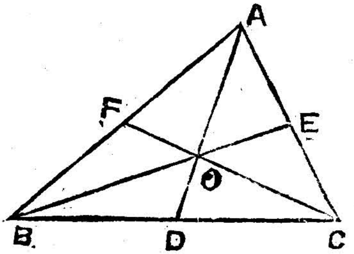
(i) AD, BE, CF ஒன்று கூடினால்

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = +1$$

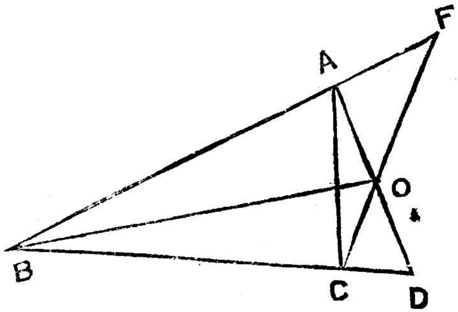
(ii) [(i)-ன் மறுதலை] $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = +1$

ஆக விருந்தால் AD, BE, CF ஒன்று கூடும்.

நி-ம். (i) AD, BE, CF O ல் ஒன்று கூடட்டும்.



ப : 1



ப : 2

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\triangle\, BAD}{\triangle\, DAC}$$ (ஏனெனில் இம் முக்கோணங்களுக்கு உயரம் ஒன்றே)

$$= \frac{\triangle\, BOD}{\triangle\, DOC} \quad \text{ஷை}$$

$$= \frac{\triangle\, BAD - \triangle\, BOD}{\triangle\, DAC - \triangle\, DOC}$$

$$= \frac{\triangle\, BAO}{\triangle\, OAC}$$

இவ்வண்ணமே,

$$\frac{CE}{EA} = \frac{\triangle\, CBO}{\triangle\, OBA}$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{\triangle\, ACO}{\triangle\, OCB}$$

ஆகவே மதிப்பைப் பொருத்தமட்டில்

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

பிறகு $\frac{BD}{DC}$, $\frac{CE}{EA}$, $\frac{AF}{PB}$ இவைகளின் குறியீடுகளைக் கவனிப்போம். O முக்கோணத்திற்கு உட்புறமிருந்தால் D, E, F முறையே BC CA, ABக்கு இடையிலிருக்கும். ஆகவே மூன்று விகிதங்களும் + குறியீடுள்ளவை; அவைகளின் பெருக்குத் தொகையும் + குறியீடுள்ளது.

O முக்கோணத்திற்கு வெளிப்புறமிருந்தால் ஷை மூன்று விகிதங்களில் ஒன்று + குறியீடுள்ளதாயும் மற்றிரண்டு — குறியீடுள்ளவையாயும் இருக்கும். உதாரணமாகப் படம் 2ல் இருப்பதுபோல் OBக்கு எதிர்ப்புறமிருந்தால் $\frac{BE}{EA}$, + குறியீடுள்ளது $\frac{BD}{DC}$, $\frac{AF}{FB}$, — குறியீடுள்ளவை. ஆகவே இவைகளின் பெருக்குத் தொகையும் + குறியீடுள்ளது.

ஆகையால் O எங்கிருந்தாலும் மதிப்பிலும் குறியீட்டிலும்

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = +\ 1.$$

நி-ம். (ii) **AD, BE, O-ல் சந்திக்கட்டும். CF, O வழியாகச் செல்லுமென்பதை நிரூபிப்போம்.**

CF, O வழியாகச் செல்லாவிடில் **CO, AB ஐ F′-ல் சந்திக்கட்டும்.**

நி-ம் : **AD, BE CF′ ஒன்றுகூடுகின்றன,**

$$\therefore \quad \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF'}{F'B}=+1$$

ஆனல் $\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}.\frac{AF}{FB}=+1$

$$\therefore \quad \frac{AF'}{F'B}=\frac{AF}{FB}$$ (மதிப்பிலும் குறியிலும்)

∴ **F′ உடன் F ஒன்றுபடும்**

அ-து., AD, BE, CF **ஒன்றுகூடும்.**

குறிப்பு :—சீவா தேற்றத்தைக் கீழ்க்கண்டபடி மாற்றியமைக்கலாம்·

அ-து., **AD, BE, CF** ஒன்று கூடினல் **BD. CE. AF = DC. EA. FB.**

அல்., **BD. CE. AF + BF. AE. CD = 0**

பயிற்சிகள்

1. ஒரு முக்கோணத்தில் :—

(i) நடுக்கோடுகள் ஒன்று கூடுகின்றன.

(ii) செங்கோடுகள் ஒன்று கூடுகின்றன.

(iii) கோண உள்சமவெட்டிகள் ஒன்று கூடுகின்றன.

(iv) இரண்டு கோணங்களின் வெளிச் சமவெட்டிகளும் மூன்ருவது கோணத்தின் உள்சமவெட்டியும் ஒன்று கூடுகின்றன.

(v) முனைகளையும் அவைகளின் எதிர் புயங்களை உள்வட்டம் தொடும் புள்ளிகளையும் சேர்க்கும் கோடுகள் ஒன்று கூடுகின்றன.

2. 1-ல் △ **ABC**-ல் **D, E, F** முறையே **BC, CA, AB**-ன் மேலுள்ள மூன்று புள்ளிகள். **AD, BE, CF** ஒன்றுகூடினல் **BC, CA, AB**-ன் மையப்புள்ளிகள் வழியாக முறையே **AD, BE, CF**-க்கு வரையப்படும் இணைகோடுகள் ஒன்றுகூடும்.

3. △ABC-ல் BC, CA, AB-ன் மேல் முறையே XBC, YCA, ZAB என்ற சமபுய முக்கோணங்கள் △ABC-க்கு வெளிப்புறமாக வரையப்படின் AX, BY, CZ ஒன்று கூடும்.

4. △ABC-ல் BC, CA, AB-ஐ ஒரு வட்டம் D, D′; E, E′; F, F′-ல் வெட்டுகிறது. AD, BE, CF ஒன்று கூடினல், AD′, BE′, CF′ ஒன்று கூடும்.

தேற்றம் 2 (மெனிலாஸ்)

ABC என்ற முக்கோணத்தின் புயங்களான BC CA, AB-ன் மேல் முறையே D, E, F என்ற புள்ளிகள் இருக்கின்றன.

(i) D, E, F ஒரு வரையினவானவையானல்

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=-1.$$

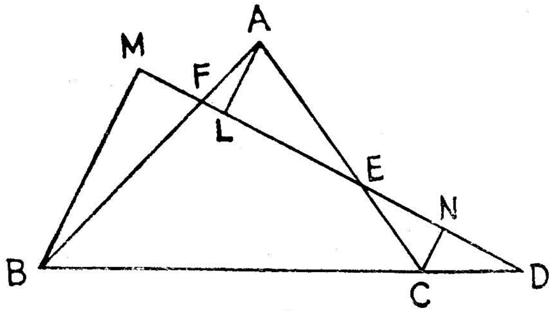
(ii) [(i)-ன் மறுதலை] $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=-1$ ஆக இருந்தால் D, E, F ஒரு வரையினவானவை.

(i) L, M, N, DEF என்ற கோட்டின்மேல் உள்ள A, B, C-ன் வீழ்ச்சிகள்.

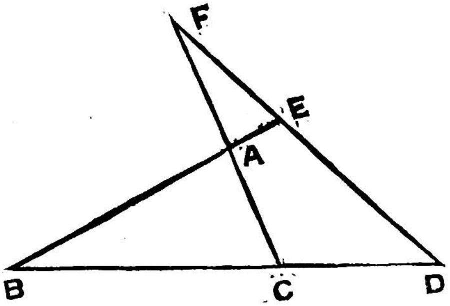
நி-ம்: $\frac{BD}{DC}=\frac{BM}{CN}, \quad \frac{CE}{EA}=\frac{CN}{AL}, \quad \frac{AF}{FB}=\frac{AL}{BM}$

ஆகவே மதிப்பைப் பொருத்தமட்டில்

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$



படம்: 3



படம்: 4

பிறகு $\frac{BD}{DC}, \frac{CE}{EA}, \frac{AF}{FB}$ இவற்றின் குறியீடுகளைக் கவனிப்போம்.

ஒரு வரையினவான மூன்று புள்ளிகளில் படம் 3-ல் இருப்பதுபோல் இரண்டு புயங்களுக்கு உட்புறமாகவும் மற்றது வெளிப்புறமாகவும் இருக்கலாம். ஆகவே மூன்று விகிதங்களில் இரண்டு + குறியீடுள்ளவை, மற்றது − குறியீடுள்ளது. அவைகளின் பெருக்குத் தொகையும் − குறியீடுள்ளது.

அல்லது படம் 4 ல் இருப்பதுபோல் மூன்று புள்ளிகளும் புயங்களுக்கு வெளிப்புறமிருக்கலாம். ஆகவே மூன்று விகிதங்களும் − குறியீடுள்ளவை; அவைகளின் பெருக்குத் தொகையும் − குறியீடுள்ளது.

ஆகையால் மதிப்பிலும் குறியீட்டிலும்

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1.$$

(ii) DE, F வழியாகச் செல்லுமென்பதை நிரூபிப்போம்.

DE, F வழியாகச் செல்லாவிடில் AB-ஐ F′-ல் சந்திக்கட்டும்.

நி-ம்: D, E, F′ ஒரு வரையினவானவை

$$\therefore \quad \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF'}{F'B} = -1.$$

ஆனல் $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$

$$\therefore \quad \frac{AF'}{F'B}=\frac{AF}{FB}$$ (மதியிலும் குறியிலும்)

∴ **F′, F ஒன்றுபடும்.**

அ-து : **D, E, F ஒரு வரையினவானவை.**

<u>குறிப்பு</u> :—மெனிலாஸ் தேற்றத்தைக் கீழ்க்கண்டபடி மாற்றியமைக்கலாம். அ-து. **D, E, F** ஒரு வரையினவானவை யாளுல் **BD. CE. AF = BF. AE. CD.**

பயிற்சிகள்

1. ஒரு முக்கோணத்தில் :

(i) கோணங்களின் வெளி சமவெட்டிகள் எதிர் புயங்களை ஒரு வரையினவான மூன்று புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன.

(ii) இரண்டு கோணங்களின் உள் சமவெட்டிகளும் மூன்ருவது கோணத்தின் வெளிச் சமவெட்டியும் எதிர் புயங்களை ஒரு வரையினவான மூன்று புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன.

2. △ **ABC**-ல் I_1, I_2, I_3 வெளி மையங்கள். $I_2 I_3, I_3 I_1, I_1 I_2$ முறையே **BC, CA, AC**-ஐ **L, M, N**-ல் சந்தித்தால் ; **L, M, N** ஒரு வரையினவானவை.

3. ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகளில் அதன் சுற்று வட்டத்தின் தொடுவரைகள் எதிர்ப்புயங்களை ஒரு வரையினவான மூன்று புள்ளிகளில் சந்திக்கும்.

4. △ள் **ABC, A′B′C′**-ல் **BC, CA, AB** முறையே **B′C′, CA, A′B′**-ஐ **L, M, N**-ல் சந்திக்கின்றன.

(i) **AA′, BB′, CC′** ஒன்றுகூடிளுல் **L, M, N** ஒரு வரையினவானவை.

(ii) **L, M, N** ஒரு வரையினவானவையாயின் **AA′, BB′, CC′,** ஒன்றுகூடும்.

5. △ **ABC**-ன் உள்வட்டம் **AB**-ஐ **Z**-லும், **A**-க்கு எதிரேயுள்ள வெளிவட்டம் **AC**-ஐ **T**-லும் தொட்டால் **BC, ZT**-ஐ மற்றிருபுயங்களின் விகிதத்தில் துண்டிக்கும்.

6. △ **ABC**-ல் **BC, CA, AB**-ன் மையப்புள்ளிகள் **A′, B′, C′**. **D, E, F** முறையே **BC, CA, AB**-ன் மேலுள்ள ஒரு வரையினவானவை யான புள்ளிகள். **AD, BE, CF** முறையே **B′C′, C′A′, A′B′**-ஐ ஒரு வரையினவான மூன்று புள்ளிகளில் சந்திக்கும்.

7. **ABC** ஒரு முக்கோணம். **O** ஏதேனுமோர் புள்ளி. **BOC, COA, AOB** என்ற கோணங்களின் வெளிச் சமவெட்டிகள் **BC, CA, AB**-ஐ ஒரு வரையினவான மூன்று புள்ளிகளில் சந்திக்கும்.

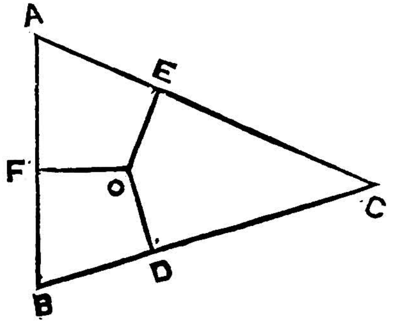
தேற்றம் 3

(i) ABC ஒரு முக்கோணம். O ஏதேனுமோர் புள்ளி D, E, F முறையே BC, CA, AB-ன்மேல் O-ன் வீழ்ச்சிகள்.
நிருபி: $BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2 = 0$

(ii) D, E, F முறையே BC, CA, AB-ன் மேல் $BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2 = 0$ ஆகவிருந்தால் D, E, F-ல் BC, CA, AB-க்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் ஒன்றுகூடும்.

(i) நி-ம்.

$$BD^2 - DC^2 = (BD^2 + DO^2) - (OD^2 + DC^2)$$
$$= BO^2 - CO^2$$
$$CE^2 - EA^2 = CO^2 - AO^2$$
$$AF^2 - FB^2 = AO^2 - BO^2$$
$$\Sigma(BD^2 - DC^2) = \Sigma(BO^2 - CO^2) = 0.$$



படம்: 5

(ii) BC-க்கு D-லும், CA-க்கு E-லும் வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் O-ல் சந்திக்கட்டும்.

OF, AB-க்குக் குத்துக்கோடு என்பதை நிரூபிப்போம்.

OF, AB-க்குக் குத்துக்கோடில்லாவிடில் BC-ன்மேல் OF′ என்ற குத்துக்கோடு வரை.

நி-ம். : D, E, F′ முறையே BC, CA, AB-ன் மேல் O-ன் வீழ்ச்சிகள்.

$\therefore\ BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF'^2 - F'B^2 = 0$

ஆனால், $BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2 = 0$

$\therefore\ AF'^2 - F'B^2 = AF^2 - FB^2$

அ-து., $(AF' + F'B)\ (AF' - F'B) = (AF + FB)\ (AF - FB)$

அ-து., $AB\ (AF' - F'B) = AB\ (AF - FB)$

அ-து., $AF' - F'B = AF - FB$

அன்றியும் $AF' + F'B = AF - FB$

$\therefore\ 2\ AF' = 2\ AF$

அ-து., F′, F ஒன்றுபடும்.

குறிப்பு :— தேற்றம் 3-ஐ கீழ்க்கண்டபடி மாற்றியமைக்கலாம். D, E, F, O-ன் வீழ்ச்சிகளானால்

$BD^2 + CE^2 + AF^2 = BF^2 + AE^2 + CD^2.$

பயிற்சிகள்

1. ஒரு முக்கோணத்தில் :
   (i) செங்கோடுகள் ஒன்று கூடுகின்றன.
   (ii) புயங்களின் நடுக்குத்துக்கோடுகள் ஒன்று கூடுகின்றன.

2. மையங்கள் ஒரே கோட்டிலிராத மூன்று வட்டங்களின் பிரதி ஜோடிகளின் பொது நாண்கள் ஒன்று கூடுகின்றன.

3. மேலே 2-ல் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டால், தொடு புள்ளிகளில் பொதுத்தொடு வரைகள் மூன்றும் ஒன்று கூடுகின்றன.

4. படம் 5-ல் A, B, C-யிலிருந்து EF, FD, DE-க்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் ஒன்றுகூடும்.

5. △ABC-ன் உள்வட்டம் BC, CA, AB-ஐ தொடு புள்ளிகள் முறையே X, Y, Z. X, Y, Z-ல் BC, CA, AB-க்குக்குத்துக்கோடு கள் வரைந்தால் இம்மூன்றும் ஒன்றுகூடும்.

6. ABC ஒரு முக்கோணம். L, M, N ஒரு கோட்டின்மேலுள்ள A, B, C-ன் வீழ்ச்சிகள். L, M, N வழியாக, BC, CA, AB-க்கு வரை யப்படும் குத்துக்கோடுகள் ஒன்றுகூடும்.

7. X, Y, Z ஒரு கோட்டின் மேலுள்ள புள்ளிகள். XX′, YY′, ZZ′ அக்கோட்டிற்குக் குத்துக்கோடுகள். X, Y, Z-லிருந்து முறையே Y′ Z′, Z′ X′, X′ Y′-க்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் ஒன்றுகூடும்.

8. △ABC-ன் அடி முக்கோணம் LMN. A, B, C வழியாக MN, NL, LM-க்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் ஒன்றுகூடும்.

9. ABC, PQR இரு முக்கோணங்கள். A, B, C வழியாக QR, RP, PQ-க்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் ஒன்றுகூடினல் P, Q, R வழியாக BC, CA, AB-க்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் ஒன்றுகூடும்.

அத்தியாயம் IV

முக்கோணத்தின் பண்புகள்

கன மையம்

ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் ஒன்று கூடுகின்றன, ஒன்றுகூடும் புள்ளி ஒவ்வொரு நடுக்கோட்டிற்கும் ஒரு முச்சரி கூறிடும் புள்ளி.

△ABC-ல் A′, B′, C′ முறையே BC, CA, AB-ன் மையப் புள்ளிகள்.

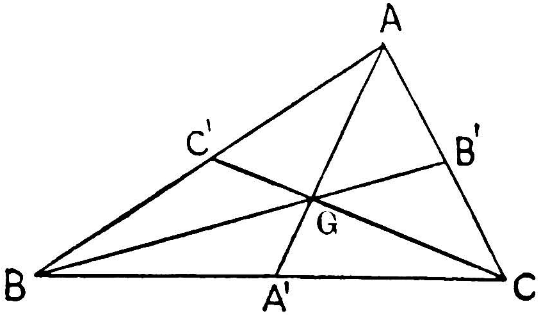
AA′, BB′, CC′ ஒன்று கூடுமென்பதை நிரூபிப்போம்.

நி-ம் :

$$\because \quad \frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = +1$$

∴ AA′, BB′, CC′ ஒன்று கூடுகின்றன (சீவா தேற்றத்தின் மறுதலை).



ப : 1

ஒன்றுகூடும் புள்ளிக்கு முக்கோணத்தின் கனமையம் (G) என்று பெயர்.

△ABA′-ன் புயங்களில், C, G, A′ ஒரு வரையினவான புள்ளிகள்.

$$\therefore \quad \frac{BC}{CA'} \cdot \frac{A'G}{GA} \cdot \frac{AC'}{C'B} = -1 \text{ (மெனிலாஸ் தேற்றம்)}$$

ஆனால் $\frac{BC}{CA'} = -2, \ \frac{AC'}{C'B} = 1$

$$\therefore \quad \frac{A'G}{GA} = \frac{1}{2}$$

ஆகவே G, AA'-ன் A'-க்குச் சமீபமான முச்சரி கூறிடும் புள்ளி. இம்மாதிரியே G மற்றிரு நடுக்கோடுகளின் முச்சரி கூறிடும் புள்ளியாகும்.

வரை :— $\triangle A'B'C'$-ஐ $\triangle ABC$-ன் மைய முக்கோணம் **என்று** கூறுவோம்.

பயிற்சிகள்

1. படம் 1-ல் கீழ்க்கண்டவைகளை நிரூபி :—

(i) $\triangle ABC$-ம் $\triangle A'B'C'$-ம் வடிவொத்தவை.

(ii) G, $\triangle A'B'C'$-ன் கன மையம்.

(iii) $4 \triangle A'B'C' = \triangle ABC$.

(iv) $2\,AA' < AB + AC$.

(v) $\frac{3}{4}(BC + CA + AB) < AA' + BB' + CC' < (BC + CA + AB)$

(vi) $AA' + BB' > CC'$.

2. ஒரு முக்கோணத்தில் இரு நடுக்கோடுகள் சமமானால் அவைகளின் ஒத்த புயங்களும் சமம்.

3. ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகளைப் புயங்களாகக்கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு கொடுத்த முக்கோணத்தின் பரப்பில் முக்கால் பாகம்.

4. கீழே தரப்பட்ட பண்புகளுள்ள முக்கோணம் வரைக.

(i) மூன்று நடுக்கோடுகளின் நீளம்.

(ii) இரண்டு புயங்களின் நீளம், மூன்றாவது புயத்திற்கொத்த நடுக்கோட்டின் நீளம்.

(iii) ஒரு புயம், மற்றிரு புயங்களுக்கும் ஒத்த நடுக்கோடுகளின் நீளம்.

(iv) இரண்டு புயங்களின் நீளம், அவைகளில் ஒன்றின் ஒத்த நடுக்கோட்டின் நீளம்.

சுற்று மையம்

தேற்றம் 2

ஒரு முக்கோணத்தின் புயங்களின் மையக் குத்துக்கோடுகள் ஒன்றுகூடுகின்றன,

△ ABC-ல் A′, B′, C′ முறையே BC, CA, AB-ன் மையங்கள். A′-ல் BC-க்கும், B′ல் CA-க்கும் வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் Sல் சந்திக்கட்டும்.

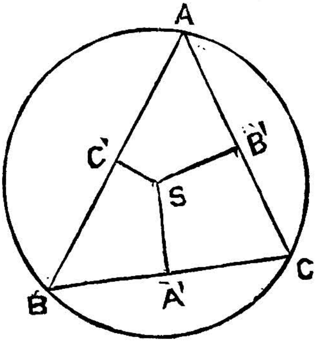
SC′, AB-க்குக் குத்துக்கோடென்று நிரூபிப்போம்.

நி-ம் :—

$\because$ SB = SC, SC = SA

$\therefore$ SB = SA

$\therefore$ SC′ $\perp$ AB.



படம் : 2

SA = SB = SC ஆகையால் A, B, C ன் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்திற்கு, S மையம்.

வ-ரை :— இவ்வட்டத்தை முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டம் என்றும், S-ஐ சுற்று மையம் என்றும் கூறுவோம்.

உள், வெளி மையங்கள்

தேற்றம் 3

ஒரு முக்கோணத்தில் (i) கோணங்களின் உள்சமவெட்டிகள் ஒன்றுகூடுகின்றன.

(ii) இரண்டு கோணங்களின் வெளிச்சமவெட்டிகளும் மூன்றாவது கோணத்தின் உள்சமவெட்டியும் ஒன்று கூடுகின்றன.

△ ABC-ல் AP, BQ, CR உள்சமவெட்டிகள், BQ′, CR′ இரு வெளிசமவெட்டிகள்.

BQ, CR I-லும், BQ′, CR′ I_1-லும் சந்திக்கட்டும். BC, CA, AB-க்கு I-லிருந்து IX, IY, IZ என்ற குத்துக்கோடுகளும், I_1-லிருந்து I_1X_1, I_1Y_1, I_1Z_1 என்ற குத்துக்கோடுகளும் வரைக.

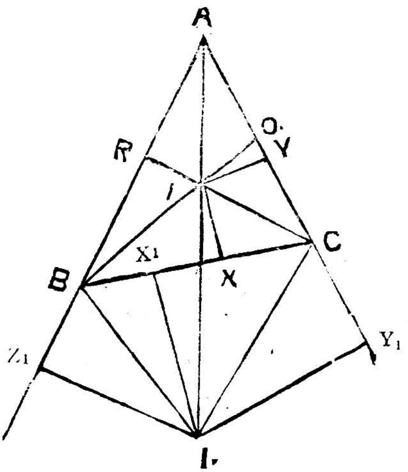
(i) AP, I வழியாகச் செல்லுமென்பதை நிரூபிப்போம்.

$\because$ IX = IY, IX = IZ

$\because$ IX = IZ

$\because$ AI, ∠A-ன் உள்சமவெட்டி

அ-து., AP, I வழியாகச் செல்லும்.



படம் : 3

(ii) AP, I_1 வழியாகச் செல்லுமென்று நிரூபிப்போம்.

$\because$ $I_1X_1 = I_1Z_1$, $I_1X_1 = I_1Y_1$

$\therefore$ $I_1Y_1 = I_1Z_1$

$\therefore$ AI_1, ∠A-ன் உள்சமவெட்டி

அ-து., AP, I_1 வழியாகச் செல்லும்.

வ-ரை :—I-ஐ $\triangle$ ABC-ன் உள்மையம் என்றும் I_1-ஐ A-க்கு எதிரேயுள்ள வெளிமையம் என்றும் கூறுவோம்.

இம்மாதிரியே B, C-க்கு எதிரேயுள்ள வெளிமையங்களை I_2, I_3 என்று பெயரிடுவோம்.

குறிப்பு :— $IX = IY = IZ$

ஆகவே I-ஐ மையமாகவும் IX-ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டம் $\triangle$ ABC-ன் புயங்களை உட்புறமாகத் தொடும்.

வ-ரை :— இவ்வட்டத்தை முக்கோணத்தின் உள்வட்டம் என்று கூறுவோம்.

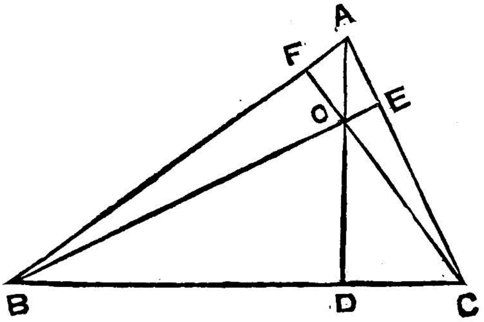
இம்மாதிரியே I_1-ஐ மையமாகவும் I_1X_1-ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டம் A-க்கு எதிர்புற வெளிவட்டம் என்று கூறுவோம்.

துணை மையம்

தேற்றம் 4

ஒரு முக்கோணத்தின் செங்கோடுகள் ஒன்றுகூடுகின்றன.

$\triangle$ ABC-ல், AD, BE, CF செங்கோடுகள். AD, BE, CF ஒன்றுகூடுமென்று நிரூபிப்போம்.



படம் : 4

$$BD^2 - DC^2 = AB^2 - AC^2$$
$$CE^2 - EA^2 = BC^2 - AB^2$$
$$AF^2 - FB^2 = AC^2 - BC^2$$

இம்மூன்று சமீகரணங்களை கூட்டினால்

$$BD^2-DC^2+CE^2-EA^2+AF^2-FB^2=0$$

∴ AD, BE, CF ஒன்றுகூடும் (தேற்றம் 3, III)

வ-ரை :—ஒன்றுகூடும் புள்ளிக்கு முக்கோணத்தின் துணை மையம் என்று பெயர். (இப்புள்ளிக்குத் துணைமையமென்று பெயரிட்ட காரணம் அத்தியாயம் 5 தேற்றம் 2-ல் விளங்கும்)

வ-ரை :—△DEF-ஐ △ABC-ன் அடி முக்கோணம் என்று கூறுவோம்.

படம் 4-ல் கீழ்க்கண்டவைகளை நிரூபி.

(i) A, B, C முறையே முக்கோணங்கள் OBC, OCA, OAB-ன் துணை மையங்கள்.

(ii) ABC, OBC, OCA, OAB என்ற நான்கு முக்கோணங்களுக்கும் அடிமுக்கோணம் ஒன்றே.

(iii) △DEF-ன் உள்மையம் O, வெளிமையங்கள் A, B, C.

(iv) $\angle EDC=\angle FDB$.

(v) A, B, C-ல் சுற்றுவட்டத்தின் தொடுவரைகள் முறையே EF, FD, DE-க்கு இணைகோடுகள்.

(vi) A, B, C-லிருந்து முறையே EF, FD, DE-க்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் சுற்றுமையத்தில் ஒன்றுகூடும்.

(vii) BOC, COA, AOB என்ற முக்கோணங்களின் சுற்றுமையங்கள் A_1, B_1, C_1.

நிரூபி :— $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle ABC$

$$OA_1=OB_1=OC_1=R.$$

(viii) $BC^2+AO^2=CA^2+BO^2=AB^2+CO^2=R^2$.

தேற்றம் 5

ஒரு முக்கோணத்தின் துணை மையத்திலிருந்து ஒவ்வொரு முனையின் தூரம், அம்முனையின் எதிர் புயத்திலிருந்து சுற்றுமையத்தின் தூரத்தைப்போல் இருமடங்கு.

△ABC-ல், O துணை மையம், S சுற்றுமையம்; A′, B′, C′, முறையே BC, CA, AB-ன் மையப்புள்ளிகள்

AO = 2SA′, BO = 2SB′, CO = 2SC′ என்று நிரூபிப்போம்.

நி-ம் :—

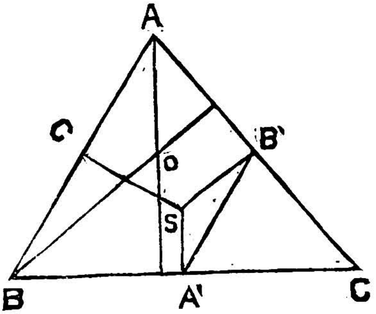
$\because$ $OA \parallel SA'$

$OB \parallel SB'$

$AB \parallel A'B'$

$\therefore$ $\triangle SA'B' \parallel\!| \triangle OAB$

$\therefore$ $\frac{OA}{SA'} = \frac{OB}{SB'} = \frac{AB}{A'B'} = 2$



படம் : 5

இம்மாதிரியே $OC = 2SC'$.

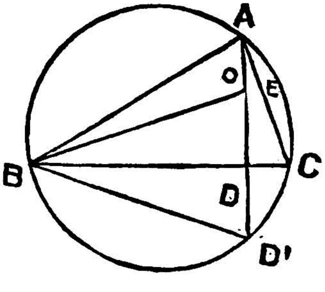
தேற்றம் 6

$\triangle ABC$-ன் துணைமையம் O. AO, BC-ஐ D-லும், சுற்று வட்டத்தை D'-லும் சந்தித்தால் $OD = DD'$.

நி-ம் :—

$\because$ $BO \perp AC$

$\therefore$ $\angle DBO = \angle CBE = 90 - \angle C$.



படம் : 6

அன்றியும்,

$\angle D'BD = \angle D'BC$

$= \angle D'AC$ (A, B, D′, C ஒரு வட்ட நேமியிலிருப்பதால்)

$= 90 - \angle C$

$\therefore \quad \angle D'BD = \angle DBO$

$\angle ODB = 90^\circ = \angle D'DB$

BD பொது

$\therefore \quad \triangle OBD \equiv \triangle D'BD$

$\therefore \quad OD = DD'$.

தேற்றம் 7

ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று மையம் S, துணை மையம் O, கன மையம் G.

நிருபி :—(i) SGO ஒருவரையினவானவை

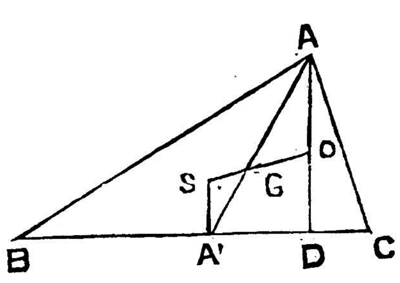
(ii) G, SO-ன் S-க்குச் சமீபமான முச்சரி கூறிடும் புள்ளி.

$\triangle ABC$-ல் A′, BC-ன் மையப்புள்ளி. AA′, SO-ஐ G′-ல் சந்திக்கட்டும்.

G′, G-யுடன் ஒன்றுபடுமென்பதை நிரூபிப்போம்.

நி-ம் :— $\because \quad SA' \parallel AO$

$\therefore \quad \triangle G'SA' \parallel\!\mid \triangle G'OA$



படம் : 7

$$\therefore \quad \frac{A'G'}{G'A} = \frac{G'S}{G'O} = \frac{SA'}{AO} = \frac{1}{2}$$

$\because \quad \frac{A'G'}{G'A} = \frac{1}{2}$, G′, AA′-ன் A-க்குச் சமீபமான முச்சரி கூறிடும் புள்ளி. அ-து., G′, G-யுடன் ஒன்றுபடும். அன்றியும்,

$$\frac{SG'}{G'O} = \text{அ-து.,} \quad \frac{SG}{GO} = \frac{1}{2}.$$

ஒன்பது புள்ளி வட்டம்

தேற்றம் 8

△ ABC-ல்,

S சுற்று மையம்

O துணை மையம்

A′, B′, C′ முறையே BC, CA, AB-ன் மையப்புள்ளிகள்.

L, M, N முறையே AO, BO, CO-ன் மையப்புள்கள்.

DEF அடி முக்கோணம்

N, SO-ன் மையப்புள்ளி.

நிருபி :— A′, B′, C′; D, E, F; L, M, N ஆகிய ஒன்பது புள்ளிகளும் ஒரே வட்ட நேமியிலமையும்.

இவ்வட்டத்தின் மையம் N, ஆரை சுற்றுவட்டத்தின் ஆரையில் பாதி.

1-வது நி-ம் :—

$\because \quad AO = 2SA'$ (தேற்றம் 5)

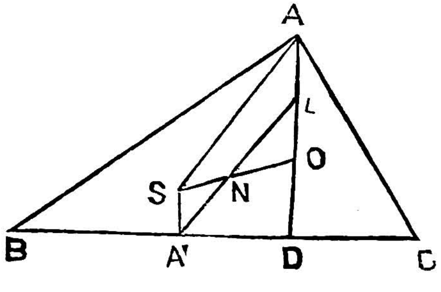
$\therefore \quad AL = SA'$

அன்றியும் AL ∥ SA′

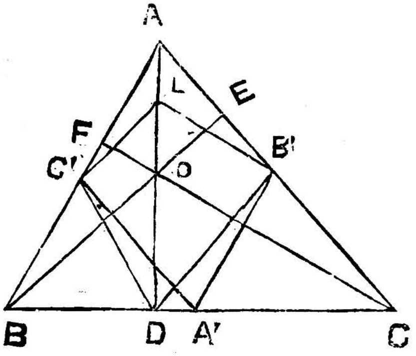
$\therefore \quad A'L = SA' = R$ சுற்றுவட்ட ஆரை

அத்துடன் AL ∥ SA′.

△OAS-ல், L, OA-ன் மையப்புள்ளி அத்துடன் LA′ ∥ SA. ஆகையால் LA′, OS-ன் மையப்புள்ளி N வழியாகச் செல்லும்.



படம் : 8



படம் : 9

$NL = \frac{1}{2} SA$

$\therefore \quad NA' = \frac{1}{2} SA = \frac{1}{2}R$

$\triangle \quad LDA'$-ல் $\angle D = 90^\circ$

$\therefore \quad ND = NL = NA' = \frac{1}{2} R.$

அ-து., N-ஐ மையமாகவும் R/2 ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டம் D, A′, L வழியாகச் செல்லுகிறது. இவ்விதமே அவ் வட்டம், E, B′, M ; F, C′, N வழியாகவும் செல்லுகிறது.

2-வது தீ-ம் :—

$\triangle BDA$-ல் $\angle D = 90^\circ$; C′, AB-ன் மையப்புள்ளி.

$\therefore \quad C'D = C'A$

$\therefore \quad \angle C'DA = \angle C'AD.$

அவ்விதமே $\angle B'DA = \angle B'AD$

$\therefore \quad \angle B'DC' = \angle B'AC'.$

ஆனால் $\angle B'A'C' = \angle B'AC'$ $\because$ D′A′C′A ஒரு இணைகரம்.

$\therefore \quad \angle B'DC' = \angle B'A'C'$

ஆகவே A′B′C′ வழியாகச் செல்லும் வட்டம் D வழியாக வும், இம்மாதிரியே E, F வழியாகவும் செல்லுகிறது.

$C'L \parallel BO, \; B'L \parallel CO$

$\therefore \quad \angle B'LC' = \angle COB = \angle EOF$

$= 180^\circ - A \; (\because \; \angle OEA = 90^\circ = \angle OFA).$

$\therefore \quad \angle B'A'C' + \angle BLC' = 180^\circ$

ஆகவே A′B′C′ வழியாகச் செல்லும் வட்டம் L வழியாக வும், இம்மாதிரியே M, N வழியாகவும் செல்லுகிறது.

வ-ரை :— **இவ்வட்டம் ஒன்பது புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லுவதால், இதற்கு ஒன்பது புள்ளி வட்டம் என்று பெயர்.**

இவ்வட்டத்தின் மையம் N-ஐ நவமையம் என்று கூறு வோம்.

பயிற்சிகள்

1. △ ABC-ன் துணைமையம் O. முக்கோணங்கள் OBC, OCA, OAB, ABC-க்கு ஒன்பது புள்ளி வட்டம் ஒன்றே.

2. △ ABC-ன் துணைமையம் O, நவமையம் N. O-விருந்து ∠ A-ன் இருசமவெட்டிகளின் மேலுள்ள வீழ்ச்சிகள் X, Y. NXY ஒரு வரையினவானவை என்று நிரூபி.

3. படம் 9-ல் A′D, B′E, C′F-ன் மையக்குத்துக்கோடுகள் N-ல் ஒன்றுகூடுகின்றன.

4. △ ABC-ன் வெளிமையங்கள் I_1, I_2, I_3. △ ABC-ன் சுற்று வட்டம் △ I_1, I_2, I_3-ன் புயங்களை அவைகளின் மையப்புள்ளிகளில் சந்திக்கும்.

5. ஒரு முக்கோணத்தின் புயங்களின் மையப்புள்ளிகள் வழியாக எதிர்கோண உள்சமவெட்டிகளுக்குக் குத்துக்கோடுகள் வரைந்தால், இக் கோடுகளாலான முக்கோணத்தின் ஒன்பது புள்ளி வட்டம் கொடுத்த முக்கோணத்தின் ஒன்பது புள்ளி வட்டமாகும்.

6. படம் 9-ல் △ AB′ C′-ன் ஒன்பது புள்ளி வட்டமும் △ A′B′C′-ன் ஒன்பது புள்ளி வட்டமும், B′C′-ன் மையப்புள்ளியில் ஒன்றையொன்று தொடும்.

7. நிலைத்த படுகையையும், கொடுத்த எதிர்கோணத்தையும் கொண்ட முக்கோணங்களின் ஒன்பது புள்ளி வட்டங்கள், ஒரு நிலைத்த வட்டத்தைத் தொடும் வட்டங்களாகும்.

8. ஒரு முக்கோணத்தின், துணைமையம், நவமையம், இரண்டு கோணங்களின் வித்தியாசம் கொடுத்திருந்தால், அம்முக்கோணத்தை வரைக.

சிம்சன் கோடு

தேற்றம் 9

ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட நேமியிலுள்ள ஓர் புள்ளியின், புயங்களின்மேலுள்ள வீழ்ச்சிகள் ஓர் நேர் கோட்டிலமையும்.

வ-ரை :—**இக்கோட்டிற்கு அப்புள்ளியின் சிம்சன் கோடு என்று பெயர்.**

△ABC-ல் P சுற்றுவட்ட நேமியிலுள்ள ஓர் புள்ளி; X, Y, Z முறையே BC, CA, AB-ன்மேலுள்ள P-ன் வீழ்ச்சிகள்.

X, Y, Z ஒருவரையினவானவையென்று நிரூபிப்போம்.

நி-ம் :— $\angle PXB = 90° = \angle PZB$

$\therefore$ PBXZ ஓர் வட்ட நாற்கோட்டம்

$\therefore \angle PZX = 180° - \angle PBC$

ஆனால் $\angle PBC = \angle PAY$ ($\because$ PBCA ஒரு வட்ட நாற்கோட்டம்)

$\therefore \angle PZX = 180° - \angle PAY$.

அன்றியும், $\because \angle PYA = 90° = \angle PZA$

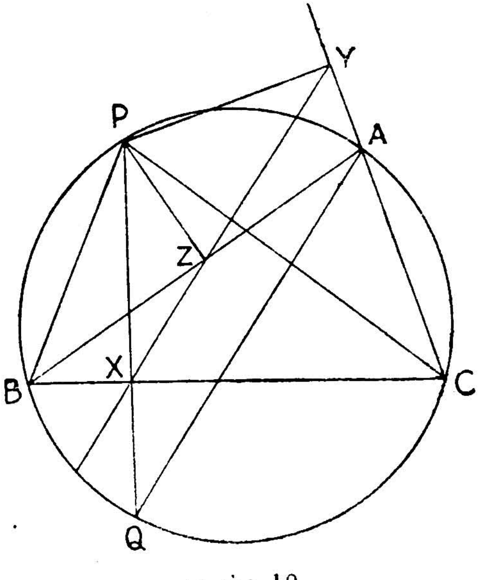
$\therefore$ PZAY ஒரு வட்ட நாற்கோட்டம்

$\therefore \angle PAY = \angle PZY$.

$\therefore \angle PZX = 180° - \angle PAY = 180° - \angle PZY$

அ-து., $\angle PZX + \angle PZY = 180°$

அ-து., X, Y, Z ஒருவரையினவானவை.



படம் : 10

கி-தே: (i) PX சுற்றுவட்டத்தை Q-ல் சந்தித்தால் P-ன் சிம்சன் கோடு AQ-க்கு இணைகோடு.

நி-ம் :—PBQA ஒரு வட்ட நாற்கோட்டம்.

$\therefore \quad \angle PQA = \angle PBA$

அன்றியும் PBXZ ஒரு வட்ட நாற்கோட்டம்

$\therefore \quad \angle PXZ = \angle PBZ = \angle PBA$.

$\therefore \quad \angle PQA = \angle PXZ$

$\therefore \quad XZ \parallel AQ$.

கி-தே : (ii) ஒரு புள்ளியின் சிம்சன் கோடு கொடுத்த ஓர் கோட்டிற்கு இணைகோடாக இருக்கும்படி புள்ளியைக் கண்டு பிடிக்க.

கொடுத்த கோட்டிற்கு AQ என்ற இணைகோடு வரைக அது சுற்றுவட்டத்தை Q-ல் சந்திக்கட்டும். Q வழியாக BC-க்கு QX என்ற குத்துக்கோடு வரைக. QX சுற்றுவட்டத்தை P.ல் சந்திக்கட்டும். P நாடும் புள்ளி.

கி-தே : (iii) PX, PY, PZ சுற்றுவட்டத்தை Q, R, T-ல் சந்தித்தால் AQ, BR, CT இணைகோடுகள்.

கி-தே : (iv) P, P′ என்ற இரு புள்ளிகளின் இடையிலுள்ள கோணம் PP′ சுற்றுவட்ட நேமியில் எதிர் வீழ்க்குங் கோணத்திற்குச் சமம்.

நி-ம் :—P,P′-லிருந்து BC-க்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் சுற்றுவட்டத்தை Q, Q′-ல் சந்திக்கட்டும் கி-தே (i)-லிருந்து AQ, AQ′ முறையே P, P′-ன் சிம்சன் கோடுகளுக்கு இணைகோடுகள். ஆகவே P, P′-ன் சிம்சன் கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள கோணம் $\angle QAQ'$-க்குச் சமம்.

ஆனால் PQ, P′Q′ சுற்றுவட்டத்தின் இணை நாண்கள் ஆகவே QQ′ சுற்றுவட்ட நேமியில் எதிர்வீழ்க்கும் கோணம் PP′ எதிர்வீழ்க்குங் கோணத்திற்குச் சமம்.

தேற்றம் 10

ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட நேமியிலுள்ள எந்தப் புள்ளியின் சிம்சன் கோடும் அந்தப் புள்ளியையும் துணை மையத்தையும் சேர்க்கும் துண்டின் மையப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும்.

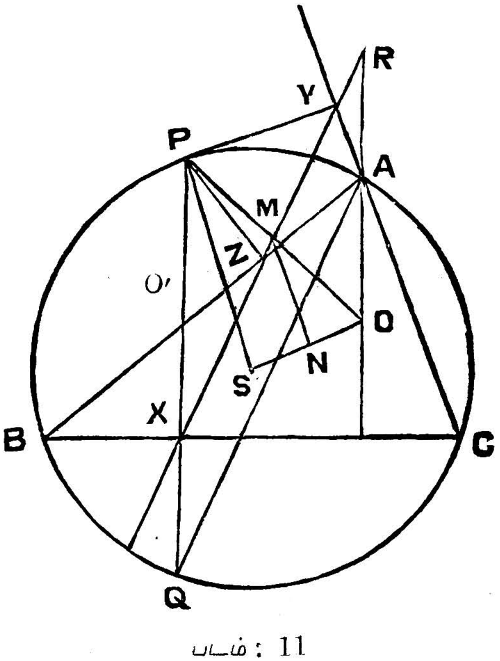
$\triangle$ ABC-ல் P சுற்றுவட்ட நேமியிலுள்ள ஓர் புள்ளி; XZ, P-ன் சிம்சன் கோடு, O துணைமையம்.

PO, XZ-ஐ M-ல் *சந்திக்கட்டும்.*

M, PO-ன் *மையப்புள்ளியென்று நிரூபிப்போம்.*

S, *சுற்றுமையம்*; **A′**, **BC-ன்** *மையப்புள்ளி*, **O′**; △ **PBC-ன்**; *துணைமையம்.*

XZ, AO-ஐ R-ல் *சந்திக்கட்டும்.* **PX** *சுற்றுவட்டத்தை* **Q-ல்** *சந்திக்கட்டும்.*



படம் : 11

நி-ம் :—

∵ **XR ∥ AQ, XQ ∥ RA**

∴ **XQAR** *இணைகரம்.*

∴ **AR = XQ**

= O′X (தேற்றம் *6*)

அன்றியும்,

AO = 2 SA′ = PO′ (தேற்றம் *5*)

∴ RA + AO = XO′ + O′P.

அ-து., **PX = RO**

மேலும் PX ∥ RO

∴ PXOR ஒரு இணைகரம்

∴ RX, PO-ஐ இரு கூருக்கும்.

அ-து., M, PO-ன் மையப்புள்ளி.

கி-தே: (i) M ஒன்பது புள்ளி வட்ட நேமியிலுள்ள ஓர் புள்ளி.

நி-ம் :—(ப : 11-ஐ பார்க்க).

N நவமையம்.

OM = MP, ON = NS

∴ NM ∥ SP

அன்றியும் $\frac{NM}{SP} = \frac{ON}{OS} = \frac{1}{2}$

∴ $NM = \frac{1}{2} SP = \frac{1}{2} R$

அ-து., M ஒன்பது புள்ளி வட்ட நேமியிலமையும்.

கி-தே: (ii) ஒரு முக்கோணத்தில் துணைமையத்தையும், சுற்றுவட்டத்தின்மேலுள்ள ஒரு புள்ளியையும் சேர்க்கும் கோட்டின் மையப்புள்ளியின் இயங்குவழி ஒன்பது புள்ளி வட்டம்.

கி-தே: (iii) ஒரு முக்கோணத்தின் துணைமையத்தின் வழியாகச் செல்லும் சுற்றுவட்டத்தின் ஒரு நாண் PQ ஒன்பது புள்ளி வட்டத்தை M, M_1-ல் சந்தித்தால் $PQ = 2MM_1$.

நி-ம் :— △ ABC-ன் துணைமையம் O. (படம் 12)

$OP = 2\ OM,\ OQ = 2OM_1$

∴ $PQ = 2\ MM_1$

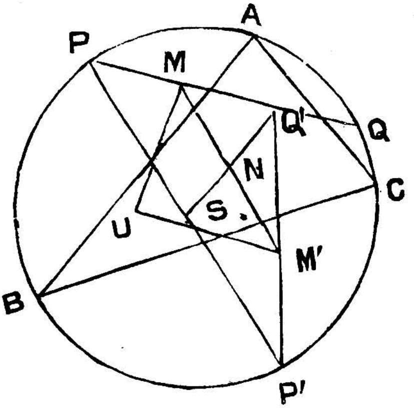
தேற்றம் 11

சுற்றுவட்டத்தின் ஒரு விட்ட முனைகளின் சிம்சன் கோடுகள் ஒன்பது புள்ளி வட்ட நேமியில் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டும்.

△ ABC-ல் PP′ சுற்றுவட்டத்தின் ஓர் விட்டம்; O துணைமையம்; N நவமையம்; M, M′ முறையே OP, OP′-ன் மையப் புள்ளிகள்.

P, P′-ன் சிம்சன் கோடுகள் U-ல் சந்திக்கட்டும்.

U ஒன்பது புள்ளி வட்ட நேமியிலுள்ளதென்றும் UM ⊥ UM′ என்று நிரூபிப்போம்.



படம்: 12

<u>நி-ம்</u> :—

∵ OM = MP, OM′ = M′P′, ON = NS

∴ M, N, M′ ஒருவரையினவாவலை

மேலும் MM′ = $\frac{1}{2}$ PP′ = R (= சுற்றுவட்ட ஆரை)

தேற்றம் 10 <u>கி-தே</u> (i)-ன் பிரகாரம் M, M′ ஒன்பது புள்ளி வட்ட நேமியிலுள்ளவை. ஆகவே MM′ ஒன்பது புள்ளி வட்டத்தின் ஓர் விட்டம்.

அன்றியும், UM ⊥ UM′ (*தேற்றம் 9* கி-தே-iv)

∴ **U ஒன்பது புள்ளி வட்ட நேமியிலுள்ளது.**

<u>**பயிற்சிகள்**</u>

1. △ABC-ல் BC, CA, AB எந்தப் புள்ளிகளின் சிம்சன் கோடுகள்?

2. **P, Q, R** △ABC-ன் சுற்றுவட்ட நேமியிலுள்ள மூன்று புள்ளிகள். **P, Q, R**-ன் சிம்சன் கோடுகளாலான முக்கோணமும் △**PQR**-ம் வடிவொத்தவை.

3. △ABC-ல், A′,BC-ன் மையப்புள்ளி; AI, ∠A-ன் உள்சம வெட்டி. வட்ட வில் BC-ன் மையப்புள்ளியின் சிம்சன் கோடு A′ வழியாக AI-க்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடு.

4. △ABC-ல், P-ன் சிம்சன் கோடு A வழியாகச் செல்லும சுற்றுவட்ட விட்டத்திற்கு இணை கோடானல், AP BC இணை கோடுகள்.

5. இரு புள்ளிகளின், ஒரு முக்கோணத்தைப் பொருத்த சிம்சன் கோடுகளின் இடையிலுள்ள கோணம் நிலையாயின், அப்புள்ளிகளைச் சேர்க்குங் கோடு, நிலைத்த ஓர் வட்டத்தைத் தொடும்.

6. △ABC-ன் மைய முக்கோணம் A′ B′ C′; அடிமுக்கோணம் DEF. A′, B′, C′-ன் △DEF-ஐப் பொருத்த சிம்சன் கோடுகள் ஒன்றுகூடும் என்று நிரூபிக்க.

7. P, Q, R △ABC-ன் சுற்றுவட்ட நேமியிலுள்ள மூன்று புள்ளிகள். P-ன் சிம்சன் கோடு QR-க்கு குத்துக்கோடானல், Q, R-ன் சிம்சன் கோடுகள் முறையே RP, PQ-க்குக் குத்துக்கோடுகளாகும்.

8. P, Q, R, △ABC-ன் சுற்றுவட்ட நேமியிலுள்ள மூன்று புள்ளிகள். P-ன் சிம்சன் கோடு QR-க்கு இணைகோடானல், Q, R-ன் சிம்சன் கோடுகள் முறையே RP, PQ-க்கு இணைகோடுகள்.

9. △ABC-ல், PQ, BC-க்கு இணை கோடாயுள்ள சுற்றுவட்டத்தின் ஒரு நாண். P, Q-ன் சிம்சன் கோடுகள் A வழியாகச் செல்லும் செங்கோட்டில் சந்திக்கும்.

10. படம் (6)-ல் D′-ன் சிம்சன் கோடு A-ல் சுற்றுவட்டத்தின் தொடுவரைக்கு இணைகோடாகும்.

11. கொடுத்த நான்கு கோடுகளின்மேல் ஒரு புள்ளியின் வீழ்ச்சிகள் ஒருவரையினவானவையாக இருக்கும்படி அப்புள்ளியைக் கண்டிபிடி.

12. கொடுத்த நான்கு கோடுகளை மும்மூன்முக எடுத்துக் கிடைக்கும் நான்கு முக்கோணங்களின் சுற்றுவட்டங்களும் ஒன்றுகூடுமென்பதை நிரூபி.

13. ஒரேவட்ட நேமியிலுள்ள நான்கு புள்ளிகளில், ஒவ்வொரு புள்ளியின், மற்ற மூன்று புள்ளிகளாலான முக்கோணத்தைப் பொருத்த சிம்சன் கோடுகள் ஒன்றுகூடும்.

ஒன்றுகூடும் புள்ளி ஷை நான்கு முக்கோணங்களின் ஒன்பது புள்ளி வட்டங்கள் கூடும் புள்ளியாகும்.

வ-ரை :—S, G, O வழியாகச் செல்லும் கோட்டிற்கு முக்கோணத்தின் ஆயிலர் (Euler) கோடு என்று பெயர்.

பயிற்சிகள்

1. ஒரு சமபுய முக்கோணத்தில் S, G, O மூன்றும் ஒன்றுபடும்; ஆனால் இரு புயங்கள் மட்டுமே சமமாயின், இப்புள்ளிகள் மூன்றும் புயத்திற்கொத்த செங்கோட்டின்மேலமையும்.

2. PQR ஒரே கோட்டிலுள்ள மூன்று புள்ளிகள்; O கோட்டிலிராத ஓர் புள்ளி. A, B, C முறையே △ OQR, ORP, OPQ-ன் சுற்று மையங்களானல் OABC ஓர் வட்ட நேமியிலமையும்.

3. △ ABC-ல் BE, CF என்ற செங்கோடுகள் சுற்றுவட்டத்தை Q, R-ல் சந்தித்தால் A, △ OQR-ன் துணைமையம்.

4. △ ABC-ன் துணைமையம் O. A வழியாகச் செல்லும் செங்கோடு சுற்றுவட்டத்தை P-ல் சந்திக்கிறது. AP-ஐ T-க்கு PT = AO ஆக இருக்கும்படி நீட்டினல் P, △ TBC-ன் துணைமையம்.

5. △ ABC-ன் சுற்றுமையம் S; P, Q, R முறையே BC, CA, AB-ன் மேலுள்ள புள்ளிகள் முக்கோணங்கள் ABC, PQR வடிவொத்திருப்பின்

(i) S, △ PQR-ன் துணைமையம்.

(ii) △-ள் AQR, BRP, CPQ-ன் சுற்றுவட்டங்கள் S வழியாகச் செல்லும்.

6. கொடுத்த நீளமுள்ள ஒரு கோட்டின் நுனிகள் நிலைத்த இரு கோடுகளின்மேலமைந்தால், இம்மூன்று கோடுகளாலான முக்கோணத்தின் துணைமைய இயங்குவழி காண்க.

7. △ ABC-ன் துணைமையம் O. X, Y ∠BAC-ன் சமவெட்டிகளின் மேலுள்ள O-ன் வீழ்ச்சிகள் XY, BC-ன் மையப்புள்ளி வழியாகச் செல்லுமென்பதை நிரூபி.

8. △ ABC-ன் செங்கோடுகள் சுற்றுவட்டத்தை PQR-ல் சந்தித்தால், △ PQR-ன் உள்மையம் △ ABC-ன் துணைமையம்.

9. △ABC-ன் துணைமையம் O. AO-ஐ விட்டமாகக்கொண்ட வட்டம் சுற்றுவட்டத்தை D-ல் சந்தித்தால் DO, BC-ன் மையப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும்.

10. △ABO-ன் உள்சமவெட்டிகள் சுற்றுவட்டத்தை XYZ-ல் சந்தித்தால் △XYZ-ன் துணைமையம் △ABC-ன் உள்மையம்.

11. △ABC-ன் புயங்களின்மேல் PBC, QCA, RAB என்ற சமபுய முக்கோணங்கள் முறையே A, B, Cக்கு எதிர்புறத்தில் வரையப்பட்டுள்ளன. இம்முக்கோணங்களின் சுற்றுமையங்கள் X, Y, Z;

நிரூபி:—AX, BY, CZ ஒன்றுகூடும்.

12. △ABC-ன் துணைமையம் O. A′, B′, C′ முறையே BC, CA, AB-ன் மையப்புள்ளிகள். D, E, F முறையே A, B, C-ன் எதிர் புயங்களின்மேலுள்ள வீழ்ச்சிகள். S சுற்றுமையம் நிரூபி:

$$SA'.\ OD = SB'.\ OE = SC'.\ OF.$$

13. கீழே தரப்பட்ட பண்புகளுள்ள முக்கோணம் வரைக.

(i) ஒரு முனை. கனமையம், துணைமையம்.

(ii) மூன்று செங்கோடுகள்.

(iii) ஒரு முனை, சுற்றுமையம், துணைமையம்.

(iv) துணைமையம், சுற்றுமையம், ஒரு புயத்தின் மையப்புள்ளி.

14. ஒரு முக்கோணத்தின் ஓர் முனையும், அம்முனைக் கோணமும் எதிர்ப்புயமும் கொடுத்திருப்பின் துணை மையத்தின் இயங்குவழி ஓர் வட்டம்.

15. △ABC-ல் X, Y, Z முறையே உள்வட்டம் BC, CA, AB-ஐ தொடும் புள்ளிகள்; S சுற்றுமையம்; I உள்மையம். △XYZ-ன் ஆயிலர் கோடு SI என்று நிரூபி.

16. △ABC-ன் சுற்றுவட்டத்தின் ஓர் விட்டமுனைகள் P, Q. P, Q வழியாக முறையே அவைகளின் சிம்சன் கோடுகளுக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் சுற்றுவட்ட நேமியில் சந்திக்கும்.

இச்சந்திப்புள்ளி R ஆயின், R-ன் சிம்சன் கோடு PQ-க்கு இணை கோடாகும்.

17. **A, B, C, D** ஒரு வட்ட நாற்கோட்டம். A_1, B_1, C_1, D_1 முறையே **BCD, CDA, DAB, ABC,** இம்முக்கோணங்களின் துணைப் புள்ளிகள்.

நிரூபி :

(i) AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 ஒன்றையொன்று ஒரே புள்ளியில் இருசம கூறாக்கும்.

(ii) இப்புள்ளி **U** ஆயின் **A, B, C, D**-ல் மூன்று புள்ளிகளாலான முக்கோணத்தைப் பொருத்த நான்காவது புள்ளியின் சிம்சன் கோடு **U** வழியாகச் செல்லும்.

அத்தியாயம் V

வட்ட ஆரங்களின் பண்புகள்

1. இணைப்புள்ளிகள்

வ-ரை :—P, Q என்ற இரு புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தின் மையம் O-வுடன் ஒரு வரையினவாயும், $OP . OQ = (\text{ஆரை})^2$ இருந்தால், P, Q வட்டத்தைப் பொருத்த* இணைப்புள்ளிகள் என்று கூறப்படும்.

ஷே வரையறையிலிருந்து அடியில் கண்டவைகள் எளிதில் விளங்கும்.

P, Q (O) என்ற வ. பொ. இணைப்புள்ளிகளானால்

(i) O, P, Q ஒரே கோட்டிலும், அக்கோட்டின்மேல் P, Q, O-க்கு ஒரே பக்கத்திலும் இருக்கவேண்டும்.

(ii) P, Q இவைகளில், ஒன்று வட்டத்திற்கு உட்புறமிருந்தால், மற்றது வெளிப்புறமிருக்கும்.

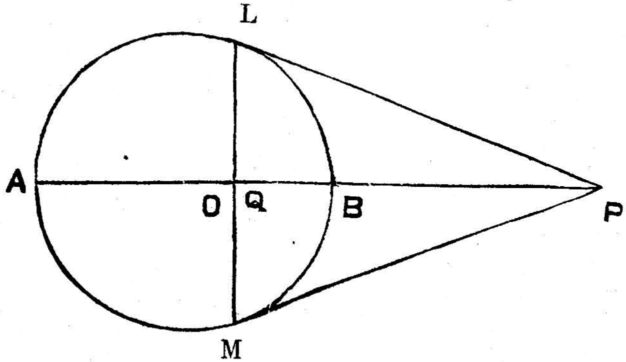
(iii) P வட்டத்தின்மேலிருந்தால் Q, P-யுடன் ஒன்றுபடும்.

இணைப்புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்கும் வழி :— கொடுத்த புள்ளி வட்டத்திற்கு வெளிப்புறமிருந்தால் (படத்தில் P ஆக வைத்துக்கொள்வோம்). P-யிலிருந்து (O)-விற்கு PL, PM என்ற தொடுவரைகள் வரைக. LM, OP-ஐ Q-ல் சந்திக்கட்டும். Q, P-ன் இணைப்புள்ளியாகும்.

நி-ம் :— $\angle OLP = 90^\circ = \angle OQL$

$\therefore \quad OP . OQ = OL^2 = (\text{ஆரை})^2$

அ-து., P, Q வ. பொ. இணைப்புள்ளிகள்.



படம்: 1

---

* சுருக்கமாக வ. பொ. என்று உபயோகிக்கப்படும்.

கொடுத்த புள்ளி வட்டத்திற்கு உட்புறமிருந்தால் (படத்தில் Q ஆக வைத்துக்கொள்வோம்). Q வழியாக OQ-க்குக் குத்துக்கோடு வரைக. அது வட்டத்தை L, M-ல் சந்திக்கட்டும். L-ல் வட்டத்தின் தொடுவரை OQ-ஐ P-ல் சந்திக்கட்டும்.

முன்போல $OP \cdot OQ = (\text{ஆரை})^2$

அ-து., P, Q-ன் இணைப்புள்ளி.

தேற்றம் 1

P, Q ஒரு * வ. பொ. இணைப்புள்ளிகள். PQ வட்டத்தை A, B-ல் சந்தித்தால் PQ, AB-ஐ இசை வீதத்தில் துண்டிக்கும். (படம் 1-ஐ பார்க்க)

நி-ம் :— $OP \cdot OQ = OA^2$

$$\therefore \quad \frac{OP}{OA} = \frac{OA}{OQ}$$

அ-து., $$\frac{OP+OA}{OA-OP} = \frac{OA+OQ}{OQ-OA}$$

$$\therefore \quad \frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{AQ}.$$

தேற்றம் 2

P, Q ஒ. வ. பொ. இணைப்புள்ளிகள்; X வட்டத்தின் மேலுள்ள ஏதேனுமோர் புள்ளி.

நிரூபி : $\frac{PX}{QX}$ = நிலையெண்

நி-ம் :—(படம் 1-ஐ பார்க்க)

$\triangle POX \,|||\, \triangle QOX$ $\left(\because \ \angle O \text{ பொது } \frac{OX}{OP} = \frac{OQ}{OX} \right)$

$$\frac{PX}{QX} = \frac{OP}{OX} = \frac{OX}{OQ}$$

$\frac{PX^2}{QX^2} = \frac{OP}{OQ}$ = நிலையெண்.

* ஒ. வ. பொ. 'ஒரு வட்டத்தைப் பொருத்த' என்பதின் சுருக்கம்.

பயிற்சிகள்

1. P, Q ; P′, Q′ என்ற ஜோடிகள் ஒ. வ. பொ. இணைப்புள்ளிகளானால் P, Q, P′, Q′ ஒரு வட்ட நேமியிலமையும்.

2. (1)-ல் வட்டத்தின் மையம் O, ஆரை r ஆனால்

$$\frac{PP'}{QQ'} = \frac{r^2}{OQ \cdot OQ'} = \frac{OP \cdot OP'}{r^2}.$$

3. (2)-ல் PP′, QQ′ மேலுள்ள O-ன் வீழ்ச்சிகள் முறையே U, V.

நிரூபி : $\dfrac{PP'}{QQ'} = \dfrac{OU}{OV}$.

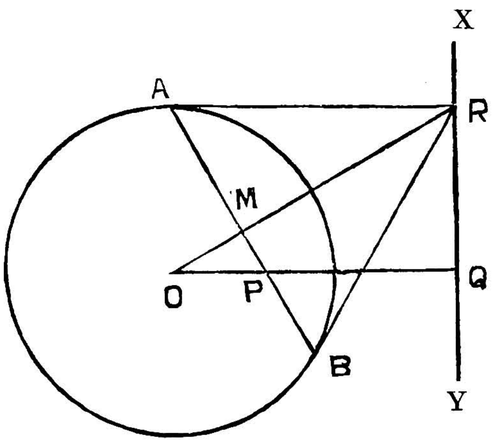
2. துணைக்கோடும் துணைப்புள்ளியும்

தேற்றம் 3

ஒரு வட்டத்தின் நாண்கள் நிலைத்த ஒரு புள்ளியின் வழியாகச் சென்றால், அவைகளின் நுனிகளின் வ. பொ. தொடுவரைகள் ஒரு நிலைத்த கோட்டில் சந்திக்கின்றன.

வ-ரை :—இக்கோட்டிற்கு கொடுத்த புள்ளியின் வ. பொ. **துணைக்கோடு** என்று பெயர்.

படம் 2-ல் (O) வட்டம், P ஏதேனுமோர் புள்ளி, AB, P வழியாகச் செல்லும் ஓர் நாண். A, B-ல் வட்டத்தின் தொடுவரைகள் R-ல் சந்திக்கட்டும்.



படம் : 2

R-ன் இயங்குவழி ஒரு நிலைக்கோடு என்று நிரூபிப்போம்.

RQ, OP-க்கு குத்துக்கோடு. AB, OR M-ல் சந்திக்கட்டும்.

நி-ம் :— $OR \perp AB.$

$OM \cdot OR = OA^2$ (தேற்றம் 1)

$\therefore \quad \angle PMR = 90^\circ = \angle PQR$

$\therefore$ MPQR ஒரே வட்ட நேமியிலிருக்கின்றன.

$\therefore \quad OP \cdot OQ = OM \cdot OR = OA^2 = (\text{ஆரை})^2$

அ-து.. Q, P-ன் வ. பொ. இணைப்புள்ளி. ஆகவே OQ-க்கு Q-ன் வழியாக வரையப்படும் குத்துக்கோடு ஒரு நிலைக்கோடாகும். R இந்த நிலைக்கோட்டின்மேலிருக்கிறது.

தேற்றம் 4 (தேற்றம் 3-ன் மறுதலை)

ஒரு கோட்டின்மேலுள்ள புள்ளிகளின் வ. பொ. தொடுநாண்கள் ஒன்றுகூடுகின்றன.

வ-ரை :—ஒன்றுகூடும் புள்ளிக்குக் கோட்டின் துணைப்புள்ளி என்று பெயர்.

(படம் 2-ஐ பார்க்க)

(O), கொடுத்த வட்டம்; R, நிலைத்த கோட்டின்மேலுள்ள ஓர் புள்ளி; AB, R-ன் வ. பொ. தொடுநாண்.

AB ஓர் நிலைத்த புள்ளி வழியாகச் செல்லுமென்று நிரூபிப்போம்.

Q, XY-ன்மேலுள்ள O-ன் வீழ்ச்சி.

OQ, OR, AB-ஐ முறையே P, M-ல் சந்திக்கட்டும்.

நி-ம் :

$\therefore \quad \angle PMR = 90^\circ = < PQR$

$\therefore$ MPQR ஒரே வட்ட நேமியிலிருக்கின்றன.

$\therefore \quad OP \cdot OQ = OM \cdot OR = (\text{ஆரை})^2$

அ-து., P, Q-ன் வ. பொ. துணைப்புள்ளி.

ஆகவே P ஒரு நிலைப்புள்ளியாகும்.

AB அந்த நிலைப்புள்ளி வழியாகச் செல்கிறது.

கி-தே :—

(i) P-ன் (O) என்ற வ. பொ. துணைக்கோடு OP-க்கு P-ன் இணைப்புள்ளி வழியாக வரையப்படும் குத்துக்கோடு.

(ii) P வட்டத்திற்கு வெளிப்புறமிருந்தால் P-ன் வ. பொ. தொடுநாணே, அதன் துணைக்கோடாகும்.

(iii) PQ என்ற கோட்டின் வ. பொ. துணைப்புள்ளி PQ-ன் மேலுள்ள O-ன் வீழ்ச்சியின் இணைப்புள்ளியாகும்.

(iv) ஒரே கோட்டின்மேலுள்ள வ. பொ. தொடு நாண்கள் அக்கோட்டின் துணைப்புள்ளி வழியாகச் செல்லு கின்றன.

தேற்றம் 5

P-ன் வ. பொ. துணைக்கோடு Q வழியாகச் சென்றால் Q-ன் வ. பொ. துணைக்கோடு P வழியாகச் செல்லும்.

வ-ரை :—இம்மாதிரி சம்பந்தமுள்ள புள்ளிகளுக்குத் துணைப்புள்ளிகள்' என்று பெயர்.

(O) கொடுத்த வட்டம், M, P-ன் வ. பொ. இணைப்புள்ளி; QM, P-ன் வ. பொ. துணைக்கோடு.

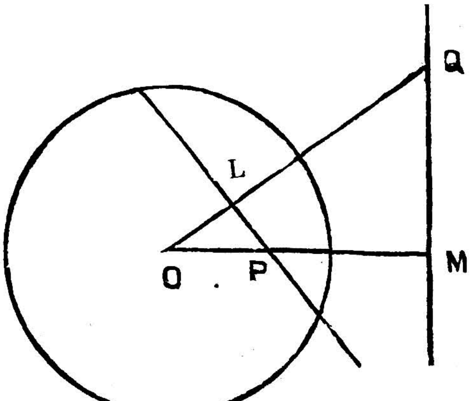
OQ-க்கு PL என்ற குத்துக்கோடு வரைக.

நி-ம். :—

$\angle QLA = 90°$

QM, P-ன் துணைக்கோடு.

$\therefore \angle QMP = 90°$



படம் : 3

∴ P, L, Q, M ஒரு வட்ட நேமியிலிருக்கின்றன.

∴ OL. OQ = OP. OM = (ஆரை)^2.

அ. து., L, Q-ன் வ. பொ. இணைப்புள்ளி. மேலும் PL ⊥ OL.

ஆகவே PL, Q-ன் வ. பொ. துணைக்கோடு.

கி-தே :—

(i) p என்ற கோட்டின் துணைப்புள்ளி q என்ற கோட்டின் மேலிருந்தால் q-ன் துணைப்புள்ளி p-ன் மேலிருக்கும் இம்மாதிரி சம்பந்தமுள்ள கோடுகளுக்குத் துணைக்கோடுகள் என்று பெயர்.

(ii) ஒ. வ. பொ. இணைப்புள்ளிகள் துணைப்புள்ளிகளுமாகும். மறுதலை உண்மையல்ல.

(iii) ஒன்று கூடும் கோடுகளின் துணைப்புள்ளிகள் ஒரு வரையினவானவை.

(iv) ஒரு வரையினவான புள்ளிகளின் துணைக் கோடுகள் ஒன்றுகூடுகின்றன.

(v) A, B என்ற இரு புள்ளிகளின் துணைக்கோடுகள் C-ல் சந்தித்தால் AB, C-ன் துணைக்கோடாகும்.

தேற்றம் 6

P, AB என்ற ஓர் வட்ட நாணின் மேலுள்ள ஓர் புள்ளி. P-ன் துணைக்கோடு AB-ஐ Q-ல் சந்தித்தால் PQ, AB-ஐ இசை வீதத்தில் துண்டிக்கும்.

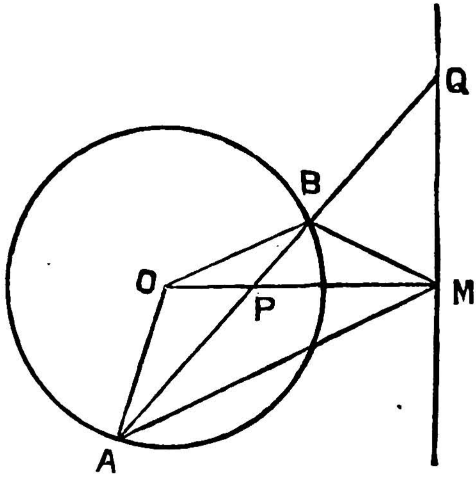
(O) வட்டம்.

M, P-ன் வ. பொ. இணைப்புள்ளி. MQ, P-ன் வ. பொ. துணைக்கோடு.

நி-ம் :—

OP. OM = (ஆரை)^2 = OA^2

∴ OA, APM என்ற வட்டத்திற்கு A-ல் தொடுவரை. இம்மாதிரியே BPM என்ற வட்டத்திற்கு OB, B-ல் தொடுவரை.



படம் : 4

$\therefore \quad \angle OAP = \angle AMP,$

$\angle OBP = \angle BMP.$

ஆனால் $\angle OAP = \angle OBP.$

$\therefore \quad \angle AMP = \angle BMP$

$\therefore$ MP, $\angle$ AMB-ன் உள்சமவெட்டி.

$\therefore$ MQ, $\angle$ AMP-ன் வெளிச்சமவெட்டி.

ஆகவே PQ, AB-ஐ இசை வீதத்தில் துண்டிக்கும்.

(தேற்றம் 3, கி-தே (i) II)

குறிப்பு :—தேற்றம் 6-லிருந்து, ஓர் புள்ளியின் வ. பொ. துணைப் புள்ளிகளின் இயங்குவழியே அதன் துணைக்கோடென்பது விளங்குகிறது.

தேற்றம் 6-ன் கருத்தை, புள்ளிக்கும் அதன் துணைக்கோட்டிற்குமுள்ள இசைவிதப் பொருத்தமென்போம்.

துணை முக்கோணம் :—

வ-ரை :— $\triangle$ PQR-ல் QR, RP, PQ முறையே P, Q, R-ன் ஒ. வ. பொ. துணைக்கோடுகளானல், அதற்கு வ. பொ. துணை முக்கோணம் என்று பெயர், வட்டத்திற்கு முக்கோணத்தின் துணைவட்டம் என்று பெயர்,

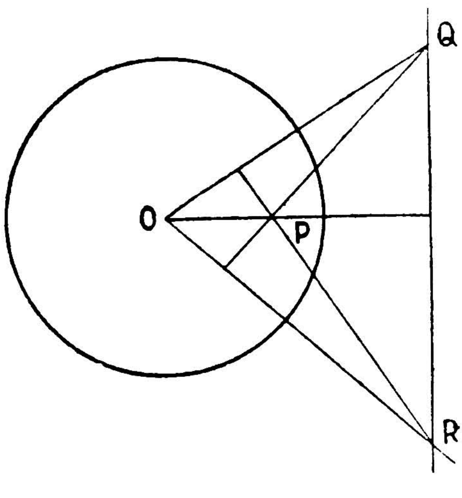
PQR (O) என்ற வ. பொ. துணை முக்கோணமானால் கீழ்க் கண்டவைகளை எளிதில் நிரூபிக்கலாம்.

(i) O, முக்கோணத்தின் செங்கோடுகள் கூடும் புள்ளி. ஆகவே இதை முக்கோணத்தின் துணைமையம் என்று கூறுவோம்,

(ii) OA. OD = OB. OE = OC. OF = (ஆரை)^2

இதின் மறுதலையும் உண்மை. அ-து.,

(iii) கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்தை *துணை முக் கோணமாகக் கொண்ட வட்டம் ஒன்றே. அதின் மையமும் ஆரையும் மேலே (i), (ii)-ன் மூலம் நிர்ணயிக்கப்படும். இவ் வட்டத்திற்கு முக்கோணத்தின் துணைமுக்கோணம் என்று பெயர்.



படம்: 5

---

* கொடுத்த முக்கோணம் விரிகோண முக்கோணமாயின் அதன் துணை வட்டம் உண்மை வட்டமாகவும், குருங்கோண முக்கோணமாயின் துணை வட்டம் மாய வட்டமாகவும் இருக்கும்.

தேற்றம் 7 (சால்மன்)

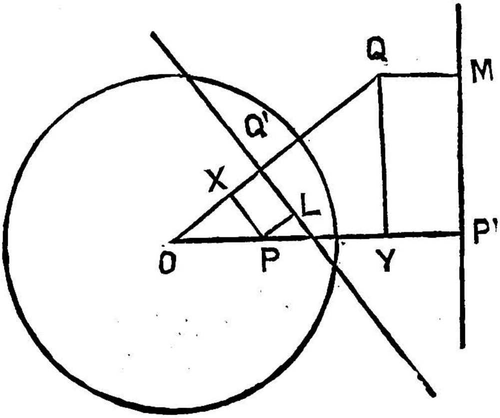
P, Q இரு புள்ளிகள், (O) ஒருவட்டம். L, Q-ன் வ. பொ. துணைக்கோட்டின் மேலுள்ள P-ன் வீழ்ச்சி; M, P-ன் வ. பொ. துணைக்கோட்டின் மேலுள்ள Q-ன் வீழ்ச்சி.

நிரூபி: $\frac{OP}{OQ} = \frac{PL}{QM}$

P, Q-ன் வ. பொ. இணைப்புள்ளிகள். P′, Q′; துணைக்கோடுகள் MP′, LQ′. OQ-ன் மேலுள்ள P-ன் வீழ்ச்சி X; OP-ன் மேலுள்ள Q-ன் வீழ்ச்சி Y.

நி-ம்:

$OP.\ OP' = (ஆரை)^2 = OQ.\ OQ'$ (i)



படம்: 6

$\angle PXQ = 90° = \angle PYQ$

∴ P, Y, Q, X ஒரே வட்ட நேமியிலிருக்கின்றன.

$\therefore OP.\ OY = OQ.\ OX$ (ii)

(ii)-லிருந்து (i)-ஐ கழித்தால்

$OP.\ YP' = OQ.\ XQ'$.

ஆனல் $YP' = QM$;

$XQ' = PL$

$\therefore OP.QM = OQ.PL$

அ-து., $\frac{OP}{OQ} = \frac{PL}{QM}$.

பயிற்சிகள்

1. ஒரே நீளமுள்ள வட்ட நாண்களின் வ. பொ. துணைப்புள்ளிகள் அதே மையமுள்ள ஓர் வட்ட நேமியிலமையும்.

2. A, B, (O) என்ற வ. பொ. துணைப்புள்ளிகள். ABன் வ. பொ. துணைப்புள்ளி C-யானால் O, △ABC-ன் துணைமையம்.

3. (2)-ல் $AC^2 - BC^2 = OA^2 - OB^2$ என்று நிரூபி.

4. P, Q ஒரு வட்டத்திற்கு வெளிப்புறமிருக்கும் இரு துணைப் புள்ளிகள். PA, QB வட்டத்திற்குத் தொடுவரைகள்.

நிரூபி :—$PA^2 + QB^2 = PQ^2$.

5. A-ன் ஒ. வ. பொ. தொடுநாண் BC. P வட்டத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி. P-ல் வட்டத்தின் தொடுவரை AB, AC, BC-யை முறையே X, Y, Z-ல் சந்தித்தால், Z, XY-ன் துணைப்புள்ளி.

6. A, B, C, D ஒரு வட்ட நேமியிலுள்ள புள்ளிகள். AC, AD; CA, BD; AB, CD முறையே P, Q, R-ல் சந்தித்தால் PQR வ. பொ. துணைமுக்கோணம் என்று நிரூபி.

7. △ABC-ன் புயங்கள் a, b, c; சுற்றுவட்டத்தின் ஆரை R; துணைவட்டத்தின் ஆரை P.

நிரூபி :—$P^2 = 4R^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.
$= -4R^2 \cos A \cos B \cos C$.

8. △ABC-ல் BC, CA, AB-ன் ஒ. வ. பொ. துணைப்புள்ளிகள் A′, B′, C′ ஆனால் (i) AA′, BB′, CC′ ஒன்றுகூடும்.

(ii) BC, B′C′ ; CA, C′A′ ; AB, A′B′ முறையே ஒரு வரையினவான மூன்று புள்ளிகளில் சந்திக்கும்.

3. நேர்மை வட்டங்கள்

வ-ரை :—இரண்டு வட்டங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம், செங்கோணமாயின், அவ்வட்டங்களுக்கு **நேர்மை வட்டங்கள்** என்று பெயர் அல்லது ஒன்று மற்றொன்றுக்கு நேர்மை வட்டம் எனப்படும்.

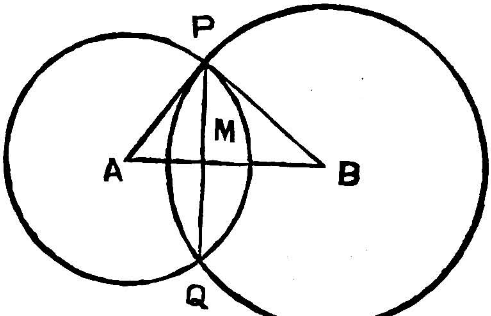
பண்புகள் :—

இரண்டு நேர்மை வட்டங்கள் P, Q-ல் சந்தித்தால்

(i) சந்திப்புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் ஒன்றின் ஆரை மற்றொன்றின் தொடுவரை.

(ii) அவைகளின் பொது நாண் ஒன்றின் மையத்தின் மற்றொன்றைப் பொருத்த துணைக்கோடு.

(A), (B) இரண்டு நேர்மை வட்டங்கள். M, மையக்கோடும் பொது நாணும் கூடும் புள்ளி.



படம் : 7

<u>நி-ம் :—</u> $\angle APB = 90° = \angle AMP$

$\therefore \quad AB \cdot AM = AP^2$

அ-து., M, B (A)-யைப் பொருத்த துணைப்புள்ளிகள்.

$\therefore$ PQ, B-ன் (A)-யைப் பொருத்த துணைக்கோடு.

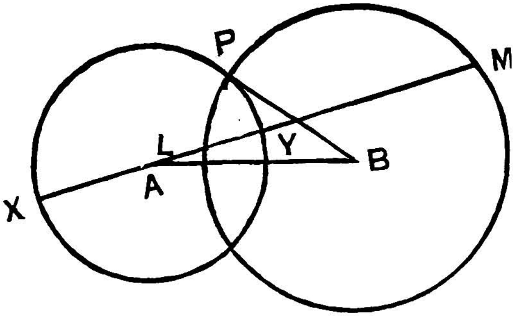
தேற்றம் 8

இரண்டு நேர்மை வட்டங்களில் ஒன்றின் விட்டம் மற்றொன்றால் இசை வீதத்தில் துண்டிக்கப்படும்.

XY என்ற (A)-ன் விட்டம், (B)-யை L, M ல் சந்திக்கட்டும்.

AP (B)-க்கு P-ல் தொடுவரை.

நி-ம் :—



படம் : 8

$AL \cdot AM = AP^2 = AX^2 = AY^2$

அ-து., LM, XY ஐ இசை வீதத்தில் துண்டிக்கிறது.

தேற்றம் 9. (தேற்றம் 8-ன் மறுதலை)

LM, XY ஐ இசை வீதத்தில் துண்டித்தால் L, M வழியாகச் செல்லும் ஒவ்வொரு வட்டமும் XY-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்திற்கு நேர்மையாகும்.

(படம் 8-ஐப் பார்க்க)

(A), XY-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம். (B) LM வழியாகச் செல்லும் ஏதேனுமோர் வட்டம்.

நி-ம் :— LM, XY-ஐ இசை வீதத்தில் துண்டிப்பதால்

$AL \cdot AM = AX^2 = AP^2$

ஆகையால் P-ல் (B)-ன் தொடுவரை AP.

$\therefore \angle APB = 90^\circ$

$\therefore$ (A), (B) நேர்மை வட்டங்கள்.

கி-தே :— L, M (A) என்ற வட்டத்தைப்பொருத்த இணைப் புள்ளிகளானல், L, M வழியாகச் செல்லும் எல்லா வட்டங்களும் (A)-க்கு நேர்மையாகும்.

குறிப்பு :— மேலே கூறப்பட்டது தேற்றம் 9-ஐ சிறிதளவு மாற்றியமைத்ததென எளிதில் விளங்கும்.

பயிற்சிகள்

1. (A), (B) இரு நேர்மை வட்டங்கள். **PQ (A)**-ன் ஓர் விட்டம். **P, Q (B)**-ன் துணைப்புள்ளிகளென நிரூபி.

2. △ **ABC**-ன் துணைமையம் **D**. **AD**-யை விட்டமாகக்கொண்ட வட்டம் **BCD** என்ற வட்டத்திற்கு நேர்மையாகும்.

3. ஒரு முக்கோணத்தின் உள்மையம் **I**. வெளி மையங்கள் I_1, I_2, I_3. $I\ I_1$-ஐ விட்டமாகக்கொண்ட வட்டம், $I_2\ I_3$-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்திற்கு நேர்மையாகும்.

4. கொடுத்த இரண்டு வட்டங்களுக்கு நேர்மையானதொரு வட்ட மையத்தின் இயங்குவழி ஒரு நிலைக்கோடு.

5. இரண்டு வட்டங்களுக்கு **AB** ஓர் பொது தொடுவரை. **AB**-ஐ விட்டமாகக்கொண்ட வட்டம் இரண்டு வட்டங்களுக்கும் நேர்மையாகும்.

4. சமித்தொடுவரை ஆயம்

தேற்றம் 10

ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரண்டு வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுவரைகள் சமமாயின், அப்புள்ளியின் இயங்குவழி ஒரு நேர் கோடு.

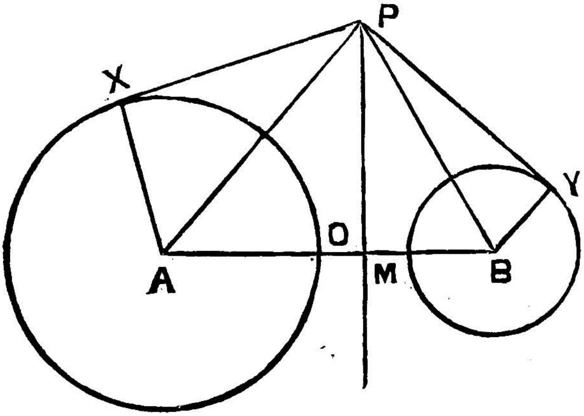
(A), (B) இரு வட்டங்கள்; அவைகளின் ஆரை முறையே, a, b. P என்ற புள்ளியிலிருந்து (A), (B)-க்கு வரையப்பட்ட தொடுவரைகள் PX, PY சமமாக இருக்கட்டும்.

P-ன் இயங்குவழி ஒரு நிலைக்கோடென்பதை நிரூபிப்போம்.

P-யிலிருந்து AB-க்கு PM என்ற குத்துக்கோடு வரை. O, AB-ன் மையம்.

நி-ம் :— $PX = PY$

$\therefore \quad PX^2 = PY^2$



படம் : 9

$\therefore \quad PA^2 - AX^2 = PB^2 - BY^2$

அ-து., $PM^2 + AM^2 - AX^2 = PM^2 + MB^2 - BY^2$

$\therefore \quad AM^2 - a^2 = MB^2 - b^2$

$\therefore \quad AM^2 - MB^2 = a^2 - b^2 \qquad -(i)$

அ-து., $(AM + MB)(AM - MB) = a^2 - b^2$

அ-து., $2\ AB.\ OM = a^2 - b^2 =$ நிலையெண்.

$\therefore$ OM ஓர் நிலைத்துண்டு அன்றியும் O ஓர் நிலைத்த புள்ளி. ஆகவே M ஒரு நிலைத்த புள்ளி. ஆகையால் AB-க்கு M வழியாக வரையப்படும் குத்துக்கோடு ஓர் நிலைக் கோடாகும். P இந் நிலைக்கோட்டின்மேலிருக்கிறது.

மேலும், இக் கோட்டின் மேலுள்ள எந்த புள்ளியிலிருந்தும் இரு வட்டங்களுக்கும் வரையப்படும் தொடுவரைகள் சமமென்பதை எளிதில் நிரூபிக்கலாம்.

ஆகவே P-ன் இயங்குவழி LM என்ற நிலைக்கோடாகும்.

வ-ரை :— இக் கோட்டிற்கு இரண்டு வட்டங்களின் சமித் தொடுவரை ஆயம் என்று பெயர்.

குறிப்பு :—மேலே சமீகரணம் (i)-ஐ கீழ்க்கண்டபடி மாற்றியெழுதுவோம்.

$AM^2 - a^2 = MB^2 - b^2 \ldots\ldots \qquad (ii)$

(*a*) $AM > a$ என்று வைத்துக்கொண்டால் (ii) லிருந்து $MB > b$ என்று தெரியவருகிறது. அதாவது, இரு வட்டங்

களின் சமித்தொடுவரை ஆயம் அவைகளில் ஒன்றை உண்மைப் புள்ளிகளில் வெட்டாவிடில், மற்றென்றையும் உண்மைப் புள்ளிகளில் வெட்டாது.

(*b*) $AB = a$ ஆயின் $MB = b$ ஆகும். அதாவது இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று M என்ற புள்ளியில் தொட்டால் அவைகளின் பொதுத் தொடுவரையே சமித்தொடுவரை ஆயமாகும்.

(*c*) $AM < a$ என்று வைத்துக் கொள்வோம். (ii) லிருந்து $MB < b$ என்று தெரியவருகிறது. ஆகவே இரு வட்டங்களின் சமித்தொடுவரை ஆயம் அவைகளில் ஏதேனுமொன்றை உண்மைப்புள்ளிகளில் சந்தித்தால் மற்றென்றையும் அதே உண்மைப் புள்ளிகளில் சந்திக்கும்.

ஆகவே, இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று உண்மைப் புள்ளிகளில் வெட்டினுல் அவைகளின் பொது நாணே சமித் தொடுவரை ஆயமாகும்.

இது சம்பந்தமாக ஒரு முக்கிய விஷயம் கவனிக்கத்தக்கது. இரண்டு வட்டங்கள் X, Y-ல் வெட்டட்டும். P, XY-ன் மேலுள்ள ஏதேனுமோர் புள்ளி. P, XY-க்கு (ஆகவே இரு வட்டங்களுக்கும்) வெளிப்புறமிருந்தால், P-யிலிருந்து இரு வட்டங்களுக்கும் உண்மைத் தொடுவரைகள் வரையலாம். அவ்விரு தொடுவரைகளும் சமமாயிருக்கும். ஏனெனில் இவ்விரு வட்டங்களைப் பொருத்தும்

$$PX \cdot PY = (\text{தொடுவரை})^2$$

ஆனுல் P, XY-க்கு இடையில் (ஆகவே, இரு வட்டங்களுக்கும் உட்புறம்) இருந்தாலோ P-யிலிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுவரைகள் மாயமாகின்றன. ஆயினும் PX . PY இரு வட்டங்களுக்கும் சமமேயாகும். ஆகவே P, XY-க்கு இடையிலிருந்தால் தேற்றம் 10-ஐ உபயோகித்தல் சரிதானு அல்லது தேற்றத்தை மாற்றியமைப்பது நலமாகுமா என்ற பிரச்சினை எழுகிறது. இம் முறண்பாட்டை நீக்கத் தேற்றம் 10-ஐ பின்வருமாறு மாற்றியமைத்தல் நலம். அவ்வாறு செய்ய முதலில் ஓர் வரையறை அவசியம்.

வ-ரை :—P என்ற புள்ளி வழியாக ஒரு வட்டத்திற்கு PQR என்ற நாண் வரை. PQ . PR P-ன் வ. பொ. தொடுவரைச் சதுரம் எனப்படும். (இதில் துண்டுகள் PQ, PR-க்கு தகுந்த குறியீடுகள் கொடுக்கவேண்டும்.) தேற்றம் 10-ஐ இப்பொழுது பின்வருமாறு மாற்றியமைக்கலாம்.

அ-து,, ஓர் புள்ளியின், இரண்டு வட்டங்களைப் பொருத்த தொடுவரைச் சதுரங்கள் சமமாயின் அப்புள்ளியின் இயங்கு வழி ஒரு நிலைக்கோடு.

தேற்றம் 11

மையங்கள் ஒரே கோட்டிலிராத மூன்று வட்டங்களின் பிரதி ஜோடிகளின் சமித்தொடுவரை ஆயங்கள் ஒன்று கூடுகின்றன.

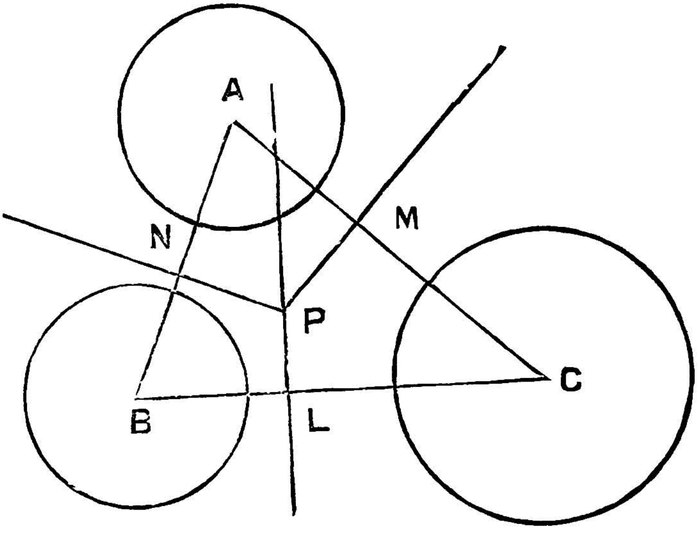
வ-ரை :— ஒன்றுகூடும் புள்ளிக்கு வட்டங்களின் சமித் தொடுவரை மையம் என்று கூறுவோம்.

(A), (B), (C) மூன்று வட்டங்கள்; a, b, c, முறையே அவைகளின் ஆரை.

(B), (C) என்ற வட்டங்களின் சமித்தொடுவரை ஆயம் BC-யை L-ல் சந்திக்கட்டும். இம்மாதிரியே M, N, (C), (A); (A), (B) என்ற ஜோடிகளைப் பொருத்த புள்ளிகள்.

நி-ம் :—

$$(BL^2 - LC^2) + (CM^2 - MA^2) + (AN^2 - NB^2)$$
$$= (b^2 - c^2) + (c^2 - a^2) + (a^2 - b^2)$$
$$= 0.$$



படம்: 10

ஆகவே BC, CA, AB-க்கு முறையே L, M, N வழியாக வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் ஒன்றுகூடுகின்றன.

ஆனால் இக் கோடுகள் மூன்று ஜோடிகளின் சமித்தொடு வரை ஆயங்கள்.

கி-தே :—(i) மூன்று வட்டங்களின் சமித்தொடுவரை மையத்திலிருந்து அவ் வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடு வரைகள் சமம்.

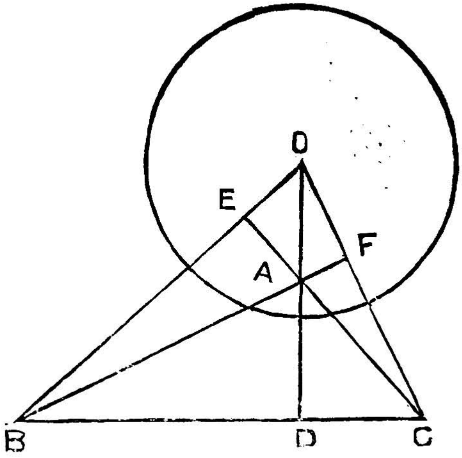
(ii) இச் சமித்தொடுவரை தூரத்தை ஆரையாகவும், சமித்தொடுவரை மையத்தை மைய்யமாகவும் கொண்ட வட்டம், மூன்று வட்டங்களுக்கும் நேர்மையாகும். இவ்வட்டம் மூன்று வட்டங்களின் பொது நேர்மை வட்டம் என்று சொல்லப் படும்.

தேற்றம் 12

ஒரு முக்கோணத்தின் துணை வட்டம் அதன் புயங்களை விட்டமாகக் கொண்ட மூன்று வட்டங்களின் பொது நேர்மை வட்டமாகும்.

ABC என்ற முக்கோணத்தில் AD, BE, CF செங்கோடுகள், O துணை மையம்.

நி-ம் :—



படம் : 11

$$OA \cdot OD = OB \cdot OE = OC \cdot OF = r^2 \quad \text{—(i)}$$

ABC-ன் துணை வட்டத்தின் மையம் O,

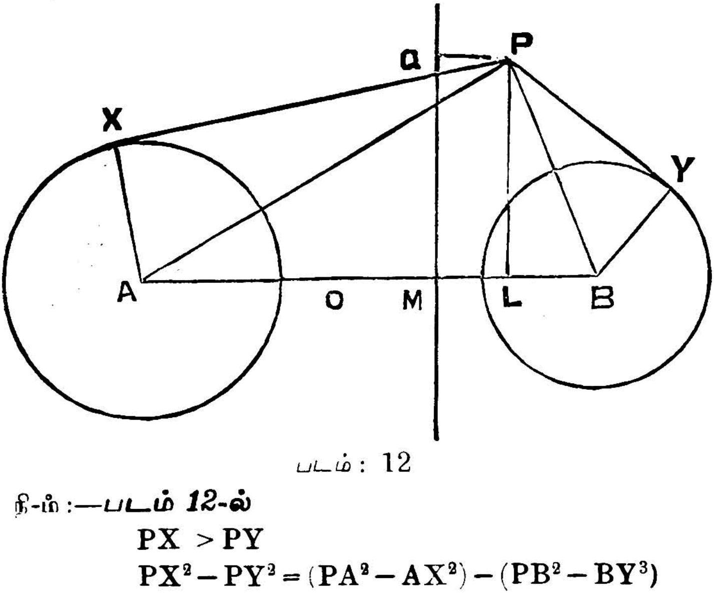
ஆரை r; F, B ஷ வட்டத்தின் இணைப்புள்ளிகள். ஆனால் BC-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் EF வழியாகச் செல்கிறது. ஆகவே தேற்றம் 9 ஐ. தே. (i) விருந்து BC-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் (O) விற்கு நேர்மையாகும். இம்மாதிரியே CA, AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டங்களும் (O) விற்கு நேர்மை வட்டங்களாகும். அதாவது மூன்று வட்டங்களுக்கும் (O) பொது நேர்மை வட்டம்.

தேற்றம் 13

(A), (B) இருவட்டங்கள், P என்ற ஏதேனுமோர் புள்ளியி விருந்து (A), (B)-க்கு வரையப்படும் தொடுவரைகள் முறையே PX, PY: Q வட்டங்களின் சமித்தொடுவரை ஆயத்தின்மேல் P-ன் வீழ்ச்சி.

நிரூபி :— $PX^2 \backsim PY^2$* = 2PQ. AB.

QM வட்டங்களின் சமித்தொடுவரை ஆயம், O, AB-ன் மையப்புள்ளி; L, AB-ன் மேலுள்ள P-ன் வீழ்ச்சி. O, AB-ன் மையப்புள்ளி.



படம்: 12

நி-ம் :—படம் 12-ல்

$$PX > PY$$

$$PX^2 - PY^2 = (PA^2 - AX^2) - (PB^2 - BY^3)$$
$$= (PA^2 - PB^2) - (AX^2 - BY^2)$$
$$= (PL^2 + AL^2) - (PL^2 + LB^2)$$

---

* $a \backsim b$ என்றால் a-க்கும் b-க்குமுள்ள வித்தியாசம்.

$$-(AX^2-BY^2)$$
$$=(AL^2-LB^2)-(AX^2-BY^2)$$
$$=(AL^2-BL^2)-(AM^2-MB^2)$$
$$=2\,AB\,.\,OL-2\,AB\,.\,OM$$
$$=2\,AB\,.\,ML$$
$$=2\,AB\,.\,PQ.$$

கி-தே :—

(i) **ஓர் புள்ளியின் இருவட்டங்களைப் பொருத்த தொடு வரைச் சதுரங்களின் வித்தியாசம் நிலையாயின் அப்புள்ளியின் இயங்குவழி, வட்டங்களின் சமித்தொடுவரை ஆயத்தின் ஓர் இணைகோடு.**

(ii) **ஒரு புள்ளியின் ஒரு வட்டத்தைப் பொருத்த தொடு வரைச் சதுரமும், ஒரு கோட்டிலிருந்து அப்புள்ளியின் தூரமும் ஒரே விகிதத்திலிருந்தால் அப்புள்ளியின் இயங்குவழி ஒரு வட்டம்.**

பயிற்சிகள்

1. கொடுத்த இருவட்டங்களுக்கு நேர்மையான வட்டங்களின் மையங்கள் அவ்விருவட்டங்களின் சமித்தொடுவரை ஆயத்தின்மேலமையும்.

2. இருவட்டங்களின் சமித்தொடுவரை ஆயம் அவ்வட்டங்களின் பொதுத் தொடுவரைகளைச் சமமாக வெட்டுகிறது.

3. இருவட்டங்களின் நான்கு பொதுத் தொடுவரைகளின் மையங்கள் ஒரு வரையினவானவை.

4. (O) ஒரு வட்டம், **Q** ஒரு நிலைப்புள்ளி. **P** ஓடும் புள்ளி. **P**-யிலிருந்து (O)-விற்கு வரையப்படும் தொடுவரை **PQ**-விற்கு சமமானல், **P**-ன் இயங்குவழி ஒரு நிலைக்கோடு.

5. △ **PQR**, △ **ABC**-ன் அடிமுக்கோணம். **QR**, **RP**, **PQ** முறையே **BC**, **CA**, **AB**-ஐ **L**, **M**, **N**-ல் சந்திக்கின்றன. **ABC**-ன் சுற்றுவட்டத்திற்கும் ஒன்பது புள்ளி வட்டத்திற்கும் சமித்தொடுவரை ஆயம் **LMN** என்று நிரூபிக்க.

6. △ **ABC**-ல் **BC**, **CA**, **AB**-ன் மையப்புள்ளிகள் முறையே **A′B′C′**. **A′T**, ∠ **B′A′C′**-ன் ஒரு சமவெட்டியானல் அது **BC**, **CA**, **AB**-ஐத் தொடும் இரு வட்டங்களின் சமித்தொடுவரை ஆயமாகும்.

7. ஒரு புள்ளியின் இரண்டு வட்டங்களைப் பொருத்த தொடுவரைச் சதுரங்களின் கூட்டுத்தொகை நிலையாயின் அப்புள்ளியின் இயங்குவழி யாது?

8. கொடுத்ததோர் வட்டத்திற்கு நேர்மையாகவும் இருபுள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும்படியும் ஓர் வட்டம் வரைக.

5. பொது ஆயவட்டங்கள்

வ-ரை :—ஒரு வட்ட வரிசையில், பிரதி ஜோடி வட்டங்களுக்கும் சமித்தொடுவரை ஆயம் ஒன்றேயாயின், அவ் வரிசைக்கு பொது ஆயவட்ட வரிசை என்று பெயர்.

பண்புகள் :—

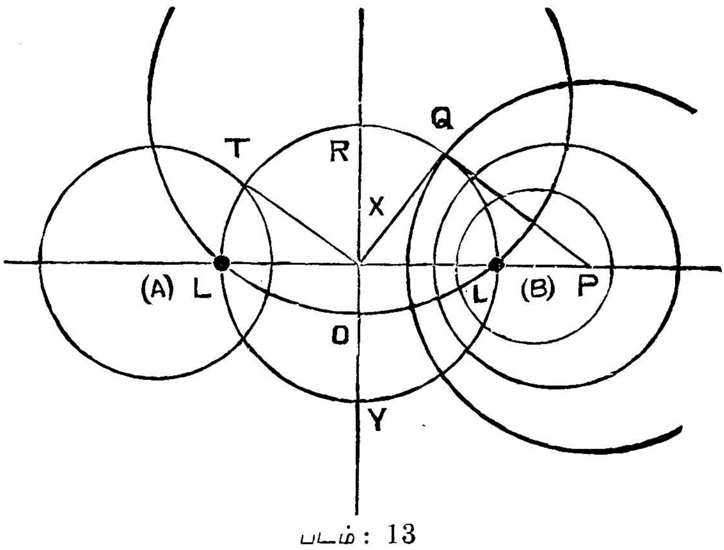
(i) பொது ஆயவட்டங்களின் மையங்கள் ஒரே கோட்டிலமையும். அக்கோடு வட்ட வரிசையின் சமித்தொடுவரைக் கோட்டிற்குக் குத்துக்கோடாகும்.

நி-ம் :—

(A), (B), (C) வரிசையில் ஏதேனும் மூன்று வட்டங்கள், XY, அவைகளின் சமித்தொடுவரை ஆயம்.

XY, (A), (B), என்ற வட்டங்களின் ச. தொ. ஆயம்.

$\therefore \quad AB \perp XY.$



படம் : 13

அதேபோல், AC $\perp^r$ XY.

$\therefore$ ABC ஒரு வரையினவானவை. அன்றியும் வட்டங்களின் மையங்கள், ஒரே கோட்டிலிருப்பதுடன், ABC, XY-க்குக் குத்துக்கோடாகவும் இருக்கிறது.

(ii) பொது ஆயத்தின் மேலுள்ள R என்ற ஏதேனு மோர் புள்ளியிலிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடு வரைகள் சமம். R-ஐ மையமாகவும், ஷ்டி சமத்தொடுவரையை ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டம், வரிசையின் எல்லா வட்டங் களுக்கும் நேர்மையாகும்.

(iii) வரிசையின் ஏதேனும் இரண்டு வட்டங்கள் உண் மைப் புள்ளிகளில் (X, Y) சந்தித்தால், மற்றெல்லா வட்டங் களும், X, Y வழியாகச் செல்லும். இவ்வரிசைக்கு **வெட்டு வரிசை** யெனப் பெயர்.

(iv) X, Y ஒன்றுபடுமாயின் எல்லா வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று ஒரே புள்ளியில் தொடுகின்றன. ஆகவே இம்மாதிரி வரிசையை **தொடும் வரிசை** யென்போம்.

(v) X, Y மாயமாயின், வரிசையில் எந்த இரண்டு வட்டங்களும் வெட்டா. இவ்வரிசையை **வெட்டா வரிசை** யென் போம்.

நி-ம் :—

கொடுத்த இரண்டு வட்டங்களைக்கொண்ட பொது ஆய வரிசையை நிர்மாணிக்க :—

இரண்டு வட்டங்களும் (உண்மைப் புள்ளிகளில், X, Y-ல்) வெட்டினால், வரிசையின் வட்டங்கள் X, Y வழியாகச் செல்லும் வட்டங்களாகும்.

இரண்டு வட்டங்களும் X என்னும் புள்ளியில் தொட்டால் வரிசையின் வட்டங்கள் அவைகளை X-ல் தொடும் வட்டங் களாகும்.

இரண்டு வட்டங்களும் வெட்டாவிடின் :—

(படம் 13-ஐ பார்க்க) கொடுக்கப்பட்ட (A), (B) என்ற இரு வட்டங்களின் சமித்தொடுவரை ஆயம், மையக் கோட்டை O-ல் சந்திக்கட்டும். P மையக் கோட்டின் மேலுள்ள ஏதேனு மோர் புள்ளி. OT, (A)-க்குத் தொடுவரை. O-ஐ மையமாகவும், OT-யை ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டத்திற்கு PQ தொடு வரை.

P-ஐ மையமாகவும், PQ-ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டம் (P) பொது ஆய வட்டங்களிலொன்று.

நி-ம் :— PQ, (O)-க்கு தொடுவரை.

∴ (O), (P) நேர்மை வட்டங்கள்.

அ-து., O-விலிருந்து (P)-க்குத் தொடுவரை OQ.

= OT = O-விலிருந்து (A)-க்குத் தொடுவரை.

ஆகவே O வழியாக AB-க்கு இழுக்கப்படும் குத்துக்கோடு. அ-து XY (A), (P) என்ற வட்டங்களின் சமித்தொடுவரை ஆயமாகும்.

எல்லைப் புள்ளிகள் (பொது ஆய வட்ட வரிசையின்) :—

ஒரு பொது ஆயவட்ட வரிசையில் இரண்டு சூன்ய வட்டங்கள் உள. அவைகளை எல்லைப் புள்ளிகளென்றும் கூறுவோம்.

வட்டம் (O), AB-ஐ L, L′-ல் சந்திக்கட்டும் ;

P என்ற வட்டத்தின் ஆரை r ஆகும் எனில்,

$r^2 = PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OL^2 = OP^2 - OL'^2$.

ஆகவே P, L அல்லது L′ உடன் ஒன்றுபட்டால் r பூஜ்யமாகிறது. அதாவது L அல்லது L′ இவைகளை மையமாகக் கொண்ட பொது ஆய வட்டங்கள் சூன்ய வட்டங்களாகும்.

மேலும், P, L-க்கும் L′-க்கும் இடையில் இருந்தால் r மாயமாகும். ஆகையால் வட்ட வரிசையில் எந்த வட்டத்தின் மையமும், L-க்கும் L′-க்கும் இடையில் இருக்கமுடியாது. அதாவது L இடதுபுறத்திலும், L′ வலப்புறத்திலும் மையங்களுக்கு எல்லைகளாக இருக்கின்றன. இக்காரணம் பற்றி L, L′-ஐ எல்லைப் புள்ளிகளென்று கூறுதல் சாலவும் பொருந்தும்.

எல்லைப் புள்ளிகளின் பண்புகள் :—

(i) ஒரு பொது ஆயவட்ட வரிசையின் எல்லைப் புள்ளிகள் வரிசையின் ஒவ்வொரு வட்டத்தைப் பொருத்த இணைப் புள்ளிகளாகும்.

வரிசையில் (A) ஏதேனுமோர் வட்டம் (A), (O) நேர்மை வட்டங்கள்.

∴ $OL \cdot OL' = OT^2 = OL^2$.

அ-து., L, L′ வட்டம் (A)-ஐப்பொருத்த இணைப்புள்ளிகள்

(ii) ஒரு பொது ஆயவட்ட வரிசையின் எல்லைப் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் ஒவ்வொரு வட்டமும் வரிசையின் வட்டங்களுக்கு நேர்மையாகும்.

மேலே (i)-லிருந்தும் தேற்றம் 9 ஐ-தே (i)-லிருந்து இது எளிதில் கிடைக்கும்.

(iii) ஒரு பொது ஆயவட்ட வரிசையின் வட்டங்களின் ஒவ்வொரு நேர்மை வட்டமும் எல்லைப் புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும்.

(K) வரிசையின் வட்டங்களுக்கு நேர்மை வட்டமானல், K வரிசையின் சமித்தொடுவரை ஆயத்தின்மேலிருக்கிறது; (K) மையக் கோட்டை வெட்டும்புள்ளிகள், வரிசையின் ஒவ்வொரு வட்டத்தைப் பொருத்த இணைப்புள்ளிகளாகும்.

அ-து., (K) மையக்கோட்டை L, L′-ல் வெட்டும்.

(iv) மேற்கூறியவைகளிலிருந்து எளிதில் கிடைக்கக் கூடியது வருமாறு :—

(a) ஒரு வெட்டா (பொது ஆயவட்ட) வரிசையின் வட்டங்களின், நேர்மை வட்டங்கள், ஒரு வெட்டும் வரிசையின் வட்டங்களாகும். மறுதலையும் உண்மையே.

(b) ஒரு வரிசையின் சமித்தொடுவரை ஆயம் மற்றதின் மையக்கோடாகும்.

(c) வெட்டா வரிசையின் எல்லைப் புள்ளிகள், மற்றதின் வெட்டும் புள்ளிகளாகும். இம்மாதிரி சம்பந்தமுள்ள இரண்டு வட்ட வரிசைகளைத் இணை ஆயவரிசைகள் என்று கூறுவோம்.

(v) ஒரு பொது ஆயவட்ட வரிசையில் எந்த இரண்டு வட்டங்களின் பொதுத் தொடுவரையும் ஒவ்வொரு எல்லைப் புள்ளிகளிலும் எதிர் வீழ்க்கும் கோணம் செங்கோணமாகும்.

(A), (B) ஒரு பொது ஆயவட்ட வரிசையில் ஏதேனும் இரண்டு வட்டங்கள். EF அவைகளின் ஓர் பொதுத் தொடு வரை.

நிரூபி :— $ELF = 90° = EL'F$

EF பொது ஆயத்தை G-ல் சந்திக்கட்டும்.

$\therefore$ GE = GF

ஆகவே G-யை மையமாகவும், GE-ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டம் கொடுத்த வட்டங்கள் (A), (B)-க்கு நேர்மை யாகும்.

$\therefore$ (G), L, L′ வழியாகச் செல்கிறது. (iii)

அ-து., GL = GE = GF

அ-து., $\angle ELF = 90° = \angle EL'F$.

பயிற்சிகள்

1. ஒரு பொது ஆயவட்ட வரிசையின் எல்லைப் புள்ளிகளிலிருந்து அவ்வரிசையில் ஒரு வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுவரைகள், சமித் தொடுவரை ஆயத்தால் சமமாகத் துண்டிக்கப்படும்.

2. தொடும் வரிசையின் இரண்டு எல்லைப் புள்ளிகளும், தொடும் புள்ளியுடன் ஒன்றுபடுகின்றன.

3. இரண்டு வட்டங்களுக்கு, ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுவரைகளின் விகிதம் நிலையாயின், அப்புள்ளியின் இயங்குவழி, இவ்விரு வட்டங்களைக்கொண்ட பொது ஆயவட்ட வரிசையில் ஓர் வட்டம்.

4. **ABC** என்ற முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டத்தின் **A, B, C**-ல் தொடுவரைகள், **BC, CA, AB**-ஐ முறையே **X, Y, Z**-ல் சந்திக்கின்றன. கீழ்க் கண்டவைகளை நிரூபி :—

(i) **AX, BY, CZ**-ஐ விட்டமாகக்கொண்ட வட்டங்கள், **ABC**-ன் சுற்றுவட்டம், ஒன்பது புள்ளி வட்டம், துணைவட்டம், இவைகளுக்கு நேர்மை வட்டங் களாகும்.

(ii) **AX, BY, CZ**-ஐ விட்டங்களாகக்கொண்ட வட்டங்கள், பொது ஆய வட்டங்கள்.

(iii) **ABC**-ன் சுற்றுவட்டம், ஒன்பது புள்ளி வட்டம், துணை வட்டம், மூன்றும் பொது ஆய வட்டங்கள்.

(iv) **AX, BY, CZ**-ன் மையப் புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலிருக்கின்றன. அக்கோடு சுற்று மையத்தையும், துணை மையத்தையும் சேர்க்கும் கோட்டிற்குக் குத்துக்கோடாகும்.

(v) **X, Y, Z**-ஐ மையமாகவும், **XA, YB, ZC** முறையே ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டங்கள், பொது ஆயமுடையவை.

(vi) (v)-ல் உள்ள வட்டங்களின் சமித்தொடுவரை ஆயம் △ **ABC**-ன் துணை மையம் வழியாகச் செல்லும்.

6. போன்மை மையங்கள்.

<u>வ-ரை :</u> (A), (B) இரு வட்டங்கள் ; a, b, அவைகளின் ஆரை ; S, S′, AB-ஐ வெளிப்புறமாகவும், உட்புறமாகவும் $a : b$ என்ற விகிதத்தில் துண்டிக்கும் புள்ளிகள்.

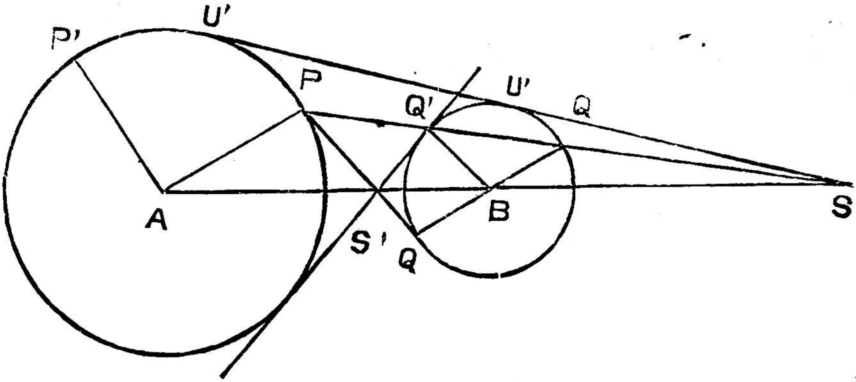
அ-து., $\dfrac{AS}{BS} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{AS'}{S'B}$……(1).

S, S′ இரு வட்டங்களின் போன்மை மையங்கள் எனப்படும். அவைகளில் S-ஐ வெளிப்போன்மை மையம் என்றும், S′-ஐ உட்போன்மை மையம் என்றும், கூறுவோம்.

குறிப்பு :—இரு வட்டங்களின் ஆரைகள் சமமாயிருந்தால் S′, AB-யின் மையப்புள்ளி.

தேற்றம் 14

இரண்டு வட்டங்களில் இணைக்கோடுகளாயுள்ள ஆரைகளின் நுனிகளைச் சேர்க்கும் கோடு அவ்வட்டங்களின் போன்மை மையங்கள் ஒன்றின் வழியாகச் செல்லும்,



படம் : 14

(A), (B) இருவட்டங்கள். S, S′ அவற்றின் போன்மை மையங்கள்.

AP, BQ நேர்முக இணை ஆரைகள்,

AP, BQ_1 எதிர்முக இணை ஆரைகள்.

PQ, S வழியாகவும், PQ_1, S′ வழியாகவும் போகுமென்பதை நிரூபிப்போம்.

PQ, S வழியாகச் செல்லாவிடில், AB-ஐ S_1-ல் வெட்டட்டும். முக்கோணங்கள் APS_1, BQS_1 வடிவொத்தவை.

$$\therefore \quad \frac{AS_1}{BS_1} = \frac{AP}{BQ}.$$

அ-து., S_1, S உடன் ஒன்றுபடும். இம்மாதிரியே PQ', S' வழியாகச் செல்லுமென்பதை நிரூபிக்கலாம்.

கி-தே :— இருவட்டங்களின் நேர்ப்பொதுத் தொடுவரைகள் அவைகளின் வெளிப்போன்மைமைய வழியாகவும், மார் பொதுத் தொடுவரைகள் உட்போன்மை மையம் வழியாகவும் செல்லும்.

தேற்றம் 15 (14ன்-மறுதலை)

இருவட்டங்களின் ஒரு போன்மை மையம் வழியாகச் செல்லும் கோடு அவ்வட்டங்களை இணை கோடுகளாயுள்ள இரு ஜோடி ஆரைகளின் நுனிகளில் சந்திக்கும்.

S ; (A), (B) என்ற இரு வட்டங்களின் ஒரு போன்மை மையம், (படம் 14 ஐ பார்க்க). S-ன் வழியாகச் செல்லும் கோடு (A)-ஐ P, P'-லும், (B) ஐ Q, Q'-லும் சந்திக்கட்டும். SAP, SBQ என்ற முக்கோணங்களில் $\angle$ PSA பொது

$$\frac{AS}{BS} = \frac{AP}{BQ}.$$

$$\therefore \quad \angle SPA = \angle SQB \qquad (i)$$

அல்லது, $\angle SPA = \pi - \angle SQB$ (ii)

(i) உண்மையாயின் படத்திலிருப்பதுபோல் AP ∥ BQ. அம்மாதிரியே AP' ∥ BQ'.

(ii) உண்மையாயின் AP' ∥ BQ, BQ' ∥ AP. (இதற்குத் தகுந்தாற்போல் வேறு படம் வரையவேண்டும்.)

வ-ரை :— படத்தில் P, Q-ஐ, அல்லது P', Q' வட்டங்களைப் பொருத்த நேர் புள்ளிகள் என்றும், P, Q' அல்லது P', Q-ஐ மார் புள்ளிகள் என்றும் கூறுவோம்.

தேற்றம் 16

இருவட்டங்களின் ஒரு போன்மை மையம் S வழியாகச் செல்லும் கோடு அவ்வட்டங்களை முறையே P, P', Q, Q'-ல் சந்திக்கிறது. P, Q'; P', Q வட்டங்களைப் பொருத்த மார் புள்ளிகளானால், SP . SQ' = SP' . SQ = நிலையெண்.

(A), (B) இருவட்டங்கள் ; a, b முறையே அவைகளின் ஆரை. P, Q ; P′, Q′ ; நேர்ப்புள்ளிகள்.

$$\therefore \quad AP \parallel BQ, \; AP' \parallel BQ'$$

$$\therefore \quad \frac{SP}{SQ} = \frac{a}{b} = \frac{SP'}{SQ'}.$$

$$\therefore \quad SP \cdot SQ' = \frac{SP}{SQ} SQ' \cdot SQ'$$

$$= \frac{a}{b} SQ \cdot SQ'$$

SQ . SQ′, S-ன் (B)-ஐப் பொருத்த தொடுவரைச் சதுரம் ஆகையால் ஓர் நிலையெண்ணாகும்.

$$\therefore \quad SP \cdot SQ' = SQ \cdot SP' = \text{நிலையெண்}.$$

<u>குறிப்பு</u> :—படத்தில் PP′ ஒன்றுபடும்போது Q, Q′-ம் ஒன்று படும். அப்பொழுது இப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு, S வழியாகச் செல்லும் வட்டங்களின் ஒரு பொதுத் தொடு வரையாகும்.

ஆகவே, இருவட்டங்களின் நேர்ப் பொதுத் தொடுவரைகள் அவைகளின் வெளிப்போன்மை மையம் வழியாகவும், மாற் பொதுத் தொடுவரைகள் உள்போன்மை மையம் வழியாகவும் செல்கின்றன.

தேற்றம் 16-லிருந்து SUV வட்டங்களின் ஒரு பொதுத் தொடுவரையாயின் SP . SQ′ = SQ . SP′ = SU . SV.

<u>வ-ரை</u> :—

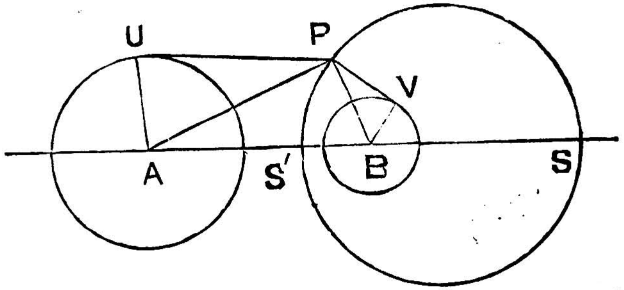
போன்மை வட்டம் :—இருவட்டங்களின் போன்மை மையங்களை விட்ட முனைகளாகக்கொண்ட வட்டத்திற்கு அவ்வட்டங்களின் போன்மை வட்டம் என்று பெயர்.

<u>குறிப்பு</u> :—போன்மை மையங்கள் வட்டங்களின் மையங்களைச் சேர்க்கும் துண்டை ஆரைகளின் விகிதத்தில் துண்டிப்பதால், அபோலோனியஸ் தேற்றத்திலிருந்து, (தேற்றம் 3) போன்மை மையவட்டத்திற்கு பின்வரும் வரையறையும் கூறலாம்.

வ-ரை :—இருவட்டங்களின் மையங்களிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தூரங்கள் முறையே ஆரைகளின் விகிதத்தில் இருந்தால், அப்புள்ளியின் இயங்குவழி அவ்வட்டங்களின் போன்மை வட்டம்.

தேற்றம் 17

இருவட்டங்களின் போன்மை வட்டத்தின்மேலுள்ள ஓர் புள்ளியிலிருந்து அவ்வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுவரைகளின் விகிதம் அவ்வட்டங்களின் ஆரைகளின் விகிதமாகும்.



படம்: 15

(A), (B) இரு வட்டங்கள்; a, b முறையே அவற்றின் ஆரைகள். S, S′ வட்டங்களின் போன்மை மையங்கள், P போன்மை வட்டத்தின்மேலுள்ள ஓர் புள்ளி. PU, PV P-யிலிருந்து முறையே (A), (B)-க்குத் தொடுவரைகள்,

$$\frac{PA}{PB} = \frac{AS}{BS} = \frac{AS'}{SS'} = \frac{a}{b}.$$

அன்றியும்,

$$\therefore \quad \frac{PA}{PB} = \frac{a}{b} = \frac{AU}{PV}.$$

$$\angle PUA = 90° = \angle PVB,$$

$$\therefore \quad \triangle PAU \parallel\!\!\mid \triangle PBV,$$

$$\therefore \quad \frac{PU}{PV} = \frac{a}{b} = \frac{PA}{PB} = \frac{a}{b}.$$

கி-தே :—PU, PU′ ; PV, PV′ ; P-லிருந்து, (A), (B)-க்கு வரையப்படும் தொடுவரைகள் $\angle UPA = \angle U'PA$, $\angle VPB = V'PB$, அத்துடன் முக்கோணங்கள் PUA, PVB வடிவொத்திருப்பதால், $\angle APU = \angle BPV$

$$\therefore \quad UPU' = VPV'.$$

ஆகவே,

கி-தே :— (i) இருவட்டங்கள், அவைகளின் போன்மை வட்டத்தின்மேலுள்ள எந்தப் புள்ளியிலும் சமகோணங்களை எதிர் வீழ்க்கும்.

(ii) இருவட்டங்களும், அவைகளின் போன்மை வட்டமும், பொது ஆய வட்டங்களாகும்.

$\because \frac{PU}{PV} = \frac{a}{b}$, என்பதிலிருந்து மேலே கூறப்பட்டது விளங்கும்.

பயிற்சிகள்

(1) இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று X-ல் தொட்டால், X அவைகளின் ஒரு போன்மை மையம்.

(2) (A), (B) என்ற இரண்டு வட்டங்களில் (A), (B)-க்கு உட்புறமிருந்தால் அவைகளின் போன்மை மையங்களிரண்டும் (A)-க்கு உட்புறமிருக்கும்.

(3) ஒரு முக்கோணத்தில் கனமையமும், துணை மையமும், சுற்று வட்டத்திற்கும் ஒன்பது புள்ளி வட்டத்திற்கும் போன்மை மையங்கள்.

(4) △ ABC-ல் GO-வை விட்ட முனைகளாகக் கொண்ட வட்டம் சுற்று வட்டத்திற்கும், ஒன்பது புள்ளி வட்டத்திற்கும் போன்மை வட்டம்.

(5) ஒரு முக்கோணத்தின் துணைமையத்தையும் சுற்று வட்ட நேமியிலுள்ள எந்தப் புள்ளியையும் சேர்க்கும் துண்டை ஒன்பது புள்ளி வட்டம் இரு சம கூறுக்கும்.

(6) ABC என்ற முக்கோணத்தின் $\angle A$-ன் உள் சம வெட்டி BC-யை L-லும் வெளி சம வெட்டி M-லும் சந்திக்கின்றன.

(i) உள் தொடு வட்டத்திற்கும் A-க்கு எதிரேயுள்ள வெளித் தொடுவட்டத்திற்கும் போன்மை மையங்கள் A, L :

(ii) **B, C**-க்கு எதிரேயுள்ள வெளித்தொடு வட்டங்களின் போன்மை மையங்கள் **A, M.**

(7) இரு வட்டங்களின் ஒரு ஜோடி மார் புள்ளிகளில் வரையப் படும் தொடுவரைகள், அவ் வட்டங்களின் சமத் தொடுவரை ஆயத்தில் சந்திக்கும்.

(8) **(A)**, **(B)** இரு வட்டங்கள். **P** ஏதேனுமோர் புள்ளி. **PU, PV, P**-யிலிருந்து முறையே **(A), (B)**-க்குத் தொடுவரைகள். **PU, PV** சமமானல் **U, V** வட்டங்களின் ஓர் போன்மை மையம் வழியாகச் செல்லும்.

(9) **(C)** என்ற வட்டம், **(A), (B)** என்ற வட்டங்களை முறையே **P, Q**-ல் தொட்டால், **PQ, (A), (B)**-ன் ஓர் போன்மை மையம் வழியாகச் செல்லும்.

(10) இரு வட்டங்களைத் தொடும் வட்டங்கள் மற்றிரு நிலைத்த வட்டங்களுக்கு நேர்மை வட்டங்களாகும்.

(11) ஒரு முக்கோணத்தின் உள் மையம் அதன் சுற்று வட்டத் திற்கும் வெளி மையங்கள் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்திற்கும் ஒரு போன்மை மையம்.

அத்தியாயம் VI

இயங்கு வழிகள்

ஒரு தளத்தில் எண்ணிறந்த புள்ளிகள் உள. அவைகளுள் கொடுத்ததோர் நிபந்தனைக்குகந்த புள்ளிகளோ, எங்கும் பரவியிராமல், தளத்திலுள்ளதோர் பாட்டையில் மட்டுமே அமையும். ஆகவே கொடுத்த நிபந்தனையை நிறைவேற்றும் ஓர் புள்ளியின் இயங்குவழியே இப்பாட்டையாகும்.

இப்பாட்டை, பொதுவாக, முற்றிலும் தொடர்ந்த புள்ளித் தொகுதிகளாலமைக்கப்பட்டிருக்கும். ஆனால் சில சமயம் நாடும் இயங்குவழி தனிப்பட்ட பல பாட்டைத் துண்டுகளாகவோ அல்லது சிதறுண்ட புள்ளித் தொகுதிகளாகவோ இருக்கலாம். அன்றியும், தனிப்பட்ட சில புள்ளிகள் மட்டுமே இயங்கு வழியாக இருத்தலும் கூடும்.

இயங்குவழிப் பிரச்சினைகளின் நிர்மாணம் முற்றுப்பெற கீழ்க்கண்ட இருபகுதிகளையும் உறுதிப்படுத்தவேண்டும்.

(i) கொடுத்த நிபந்தனைக்குகந்த புள்ளிகள் யாவும் இயங்குவழியிலமையும்.

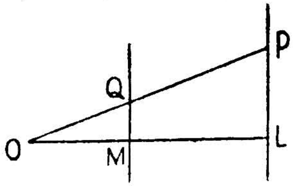
(ii) இயங்குவழியிலுள்ள புள்ளிகள் யாவும் கொடுத்த நிபந்தனைக்குகந்தவை.

தேற்றம் 1

நிலைத்ததோர் புள்ளியையும், கொடுத்த கோட்டின் மேலுள்ளதோர் புள்ளியையும் சேர்க்கும் துண்டைக் கொடுத்த விகிதத்தில் துண்டிக்கும் புள்ளியின் இயங்குவழி ஓர் இணைக்கோடு.

O நிலைப்புள்ளி, AB நிலைக்கோடு; P, AB-ன்மேல் ஓர் புள்ளி; Q, OP-ஐ கொடுத்த $l:m$ விகிதத்தில் துண்டிக்கும் புள்ளி.

Q-ன் இயங்குவழி AB-க்கு இணைகோடு என்று நிரூபிப்போம்.



படம் : 1

L, AB-ன் மேலுள்ள O-ன் வீழ்ச்சி ; M, OL-ஐ கொடுத்த $l : m$ விகிதத்தில் துண்டிக்கும் புள்ளி.

L, M நிலைப்புள்ளிகள்.

நிறு :— $\frac{OP}{OQ} = \frac{OL}{OM}$.

$\therefore$ QM ‖ PL

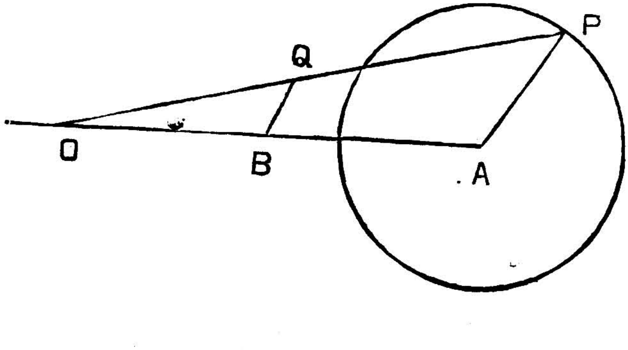
ஆகவே Q-ன் இயங்குவழி M வழியாகச் செல்லும் AB-ன் இணை கோடாகும்.

தேற்றம் 2

நிலைத்ததோர் புள்ளியையும் கொடுத்ததோர் வட்ட நேமியிலுள்ள ஒரு புள்ளியையும் சேர்க்கும் துண்டைக் கொடுத்த விகித்தில் துண்டிக்கும் புள்ளியின் இயங்குவழி ஓர் வட்டம்.

O நிலைத்த புள்ளி, (A) கொடுத்த வட்டம் ; P வட்ட நேமியிலுள்ள ஒரு புள்ளி, Q, OP-ஐ கொடுத்த $l : m$ விகிதத்தில் துண்டிக்கும் புள்ளி.

Q-ன் இயங்குவழி ஓர் வட்டம் என்று நிரூபிப்போம்.



படம் : 2

B, OA-ஐக் கொடுத்த விகிதத்தில் துண்டிக்கும் புள்ளி ஆகவே B ஓர் நிலைப்புள்ளி.

நி-ம் :—

$$\frac{BQ}{AP} = \frac{OQ}{OP} = \frac{OB}{OA} = \text{நிலையெண்.}$$

$\therefore\ BQ \parallel AP$

அன்றியும் BQ = நிலையெண்.

ஆகவே Q-ன் இயங்குவழி, B-ஐ மையமாகக் கொண்ட ஓர் வட்டம்.

கி-தே : (A), (B) இரு வட்டங்களுக்கும் O ஓர் போன்மை மையம்.

பயிற்சிகள்

1. நிலைத்த படுகையையும் கொடுத்த பரப்பையுமுடைய முக்கோணங்களின் கன மைய இயங்குவழி காண்க.

2. ஒரு இணைகரத்தின் ஒரு புயமும் பரப்பும் கொடுத்திருப்பின், அதன் மூலை விட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவழி யாது?

3. ஓர் முக்கோணத்தின் ஒரு புயமும் அதையடுத்த ஓர் கோணமும் கொடுத்திருப்பின், கன மையத்தின் இயங்குவழி காண்க.

4. இரு நிலைக்கோடுகளிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தூரங்கள் கொடுத்த விகிதத்திலிருந்தால், அப் புள்ளியின் இயங்குவழியாது?

5. ஒரு முக்கோணத்தின் ஓர் முனையும், ஒன்பது புள்ளிவட்டமும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், துணைமையத்தின் இயங்குவழி ஓர் வட்டம்.

6. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு புயமும் மற்றிரு புயங்களின் இரு படிகளின் கூட்டுத் தொகையும் கொடுத்திருப்பின், கன மையத்தின் இயங்குவழி யாது?

தேற்றம் 3 (அபொலோனியஸ்)

நிலைத்த இரு புள்ளிகளிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தூரங்கள் ஒரே விகிதத்திலிருந்தால் அப்புள்ளியின் இயங்குவழி ஓர் வட்டம்.

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் A, B; விகிதம் $l:m$. X, Y, AB-ஐ உட்புறமாகவும் வெளிப்புறமாகவும் $l:m$ விகிதத்தில் துண்டிக்கும் புள்ளிகள்.

நாடும் இயங்குவழி XY-ஐ விட்டமாகக்கொண்ட வட்ட மென்று நிரூபிப்போம்.

அ-து.,

(i) PA : PB = l : m ஆகின், P இவ்வட்டநேமியிலமையும்.

(ii) அன்றியும், இவ்வட்ட நேமியில் P ஏதேனுமோர் புள்ளியானல் PA : PB = l : m.

(i) நி-ம் :—

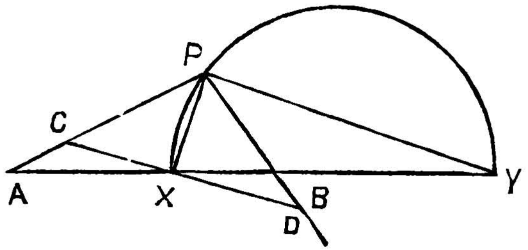
$$PA : PB = l : m$$

$$\therefore \quad \frac{AX}{BX} = \frac{PA}{PB} = \frac{AY}{BY}$$

∴ PX, PY முறையே ∠ APB-ன் உள், வெளிச் சமவெட்டிகள்.

$$\therefore \quad \angle XPY = 90°.$$

ஆகவே P, XY-ஐ விட்டமாகக்கொண்ட வட்டநேமியி லமையும்.



படம் : 3

(ii) P, XY-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்ட நேமியி லோர் புள்ளி. X வழியாக PY-க்கு CD என்ற இணைகோடு வரை.

நி-ம் : ∴ CD ∥ PY

$$\therefore \frac{AX}{AY} = \frac{CX}{PY} \text{ அன்றியும் } \frac{XB}{BY} = \frac{XD}{PY}.$$

ஆனல் $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{BY}$

$$\therefore \frac{AX}{AY} = \frac{XB}{BY}$$

$$\therefore \frac{CX}{PY} = \frac{XB}{BY}$$

அ-து., $CX = XD$.

$\triangle$-ன் PCX, PDX-ல்

$CX = XD$, PX பொது

$\angle PXC = 90^\circ = \angle PXD$

$\therefore \quad \triangle PXC \equiv \triangle PXD$.

$\therefore \quad \angle CPX = \angle XPD$

அ-து., PX, $\angle$APB-ன் உள் சம வெட்டி

$$\therefore \frac{PA}{PB} = \frac{AX}{XB} = \frac{l}{m}$$

வ-ரை :— இவ்வட்டத்திற்கு AB-ன் ($l : m$ விகிதத்திற்குகந்த) அபொலோனியஸ் வட்டம் என்று பெயர்.

கொடுத்த விகிதம் மாறினல் அதற்குகந்த அபொலோனியஸ் வட்டமும் மாறும்.

அன்றியும் $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{BY}$ ஆகவே A, B இவ் விட்டங்களைப் பொருத்த இணைப்புள்ளிகள். இதிலிருந்து கீழ்க்கண்ட கிளைத் தேற்றம் எளிதில் கிடைக்கும்.

கி-தே :— கொடுத்த இரு புள்ளிகளின் அபொலோனியஸ் வட்டங்கள் அப்புள்ளிகளை எல்லைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட பொது ஆயவட்ட வரிசையிலமையும்.

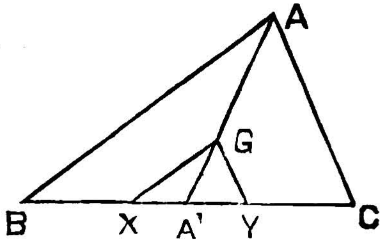
தேற்றம் 4

நிலைத்த படுகையையும் கொடுத்த உச்சிக்கோணத்தையும் கொண்ட முக்கோணங்களின் (i) கன மையம் (ii) நவமையம் (iii) துணைமையம் (iv) உள்மையம் (v) வெளி மையங்கள், இவைகளின் இயங்குவழி காண்க.

ABC கொடுத்த பண்புகளுள்ள ஓர் முக்கோணம். அதன் கனமையம் G, நவமையம் N, துணை மையம் O, உள் மையம் I, வெளிமையங்கள் I_1, I_2, I_3 முறையே A, B, C-க்கு எதிர்புறமுள்ளவை.

S, சுற்று மையம்; A′, BC-ன் மையப்புள்ளி. T, BC-ல் S-ன் பிம்பம். S, A′, T மூன்றும் நிலைப்புள்ளிகள்.

(i) G வழியாக AB, AC-க்கு முறையே GX, GY என்ற இணை கோடுகள் வரை.



படம்: 4

நி-ம்:— $\frac{A'X}{A'B} = \frac{A'G}{A'A} = \frac{1}{3}, \ \frac{A'Y}{A'C} = \frac{A'G}{A'A} = \frac{1}{3}$

∴ X, Y; BC-ன் முச்சரி கூறிடும் புள்ளிகள். அன்றியும் $\angle XGY = \angle BAC =$ நிலைக்கோணம்.

ஆகவே G-ன் இயங்குவழி XY-ஐ முனைகளாகக்கொண்ட ஒரு வட்ட வளைவு.

(ii) $AO = 2SA' = ST$

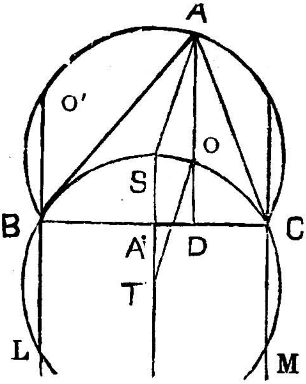
மேலும் $AO \parallel ST$

∴ $TO = SA = R$ சுற்றுரை.

அன்றியும் $TO \parallel SA$

T ஒரு நிலைத்த புள்ளி. ஆகவே O, T-ஐ மையமாகவும் R-ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டநேமியிலிருக்கும்.

இவ்வட்டம் BC வழியாகச் செல்லும். ஏனெனில் TB = TC = SC = R.



படம்: 5

B, C வழியாக BC-க்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் ஷி வட்டத்தை L, M-ல் சந்திக்கட்டும்.

O, LOM என்ற வட்ட வளைவில் இருக்குமென்பதை நிரூபிப்போம்.

$\because \angle LBC = 90°$.

$\therefore LB = 2\,SA' = TS$

அன்றியும் LB ∥ TS

$\therefore$ TL ∥ SB

இம்மாதிரியே TM ∥ SC.

SA, TO இணைகோடுகள். ஆகையால் A, B-யுடன் ஒன்றுபடுங்கால் O, K-யுடன் ஒன்றுபடும்; A, C-யுடன் ஒன்றுபடுங்கால் O, M-உடன் ஒன்றுபடும். ஆகவே O-ன் இயங்குவழி வட்ட வளைவு LOM.

(iii) ந-ம் :—

$\because SN = NO,\ SA' = A'T$

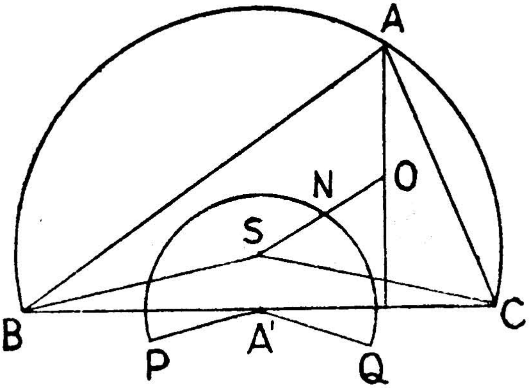
$\therefore A'N = \frac{1}{2} TO = \frac{1}{2} R.$

அன்றியும் A'N ∥ TO

$\therefore$ A'N ∥ SA

A' ஓர் நிலைத்த புள்ளி.

ஆகவே N, A′-ஐ மையமாகவும் $\frac{1}{2}$ R-ஐ ஆரையாகவும் ஓர் வட்ட நேமியிலிருக்கும்.



படம் : 6

A′ வழியாக SB, SC-க்கு முறையே A′P, A′Q என்ற இணை கோடுகள் வரை. இக்கோடுகள் ஷை வட்டத்தை முறையே P, Q-ல் சந்திக்கட்டும். N-ன் இயங்குவழி வட்டவளைவு PNQ.

A′N, SA இணைகோடுகள். ஆகவே A, B-யுடன் ஒன்று படுங்கால் N, P-யுடன் ஒன்றுபடும்; A, C-யுடன் ஒன்றுபடுங் கால் N, Q-யுடன் ஒன்றுபடும்.

(iv), (v) I, I_1-ன் இயங்கு வழிகள் :—

A I I_1, △ABC-ன் சுற்றுவட்டத்தை M-ல் சந்திக்கட்டும.

△ $I_1 I_2 I_3$-ன் துணைமையம் I.

∴ ⊙ ABC △ $I_1 I_2 I_3$-ன் ஒன்பது புள்ளி வட்டம்.

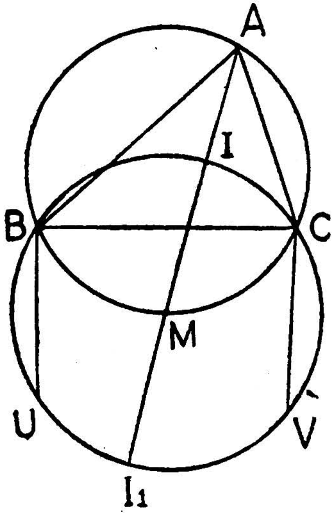
∴ $I_1 M = MI$

அன்றியும் $\angle I_1 BI = 90°$

∴ $MI = MI_1 = MB = MC$

M ஓர் நிலைப்புள்ளி.

$\therefore$ I, I_1, M-ஐ மையமாகவும் MB-ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டநேமியிலிருக்கின்றன.



படம் : 7

B, C வழியாக BC-க்கு வரையப்படும் குத்துக் கோடுகள் ஷி வட்டத்தை U, V-ல் சந்திக்கட்டும்.

A, B-யுடன் ஒன்றுபடுங்கால் I, B-யுடனும், I_1 V-யுடனும் ஒன்றுபடும். A, C-யுடன் ஒன்றுபடுங்கால் I, C-யுடனும், I_1, U-வுடனும் ஒன்றுபடும். ஆகவே I-ன் இயங்குவழி வட்ட வளைவு BIC ; I_1-ன் இயங்குவழி வட்ட வளைவு U I_1 V.

<u>I_2, I_3-ன் இயங்கு வழிகள் :—</u>

I_2 AI_3 சுற்றுவட்டத்தை $\triangle$ABC-ன் சுற்று வட்டத்தை M_1-ல் சந்திக்கட்டும். $\odot$ ABC, $\triangle$ I_1 I_2 I_3-ன் ஒன்பது புள்ளி வட்டம்.

$\therefore \quad M_1 I_2 = M_1 I_3$

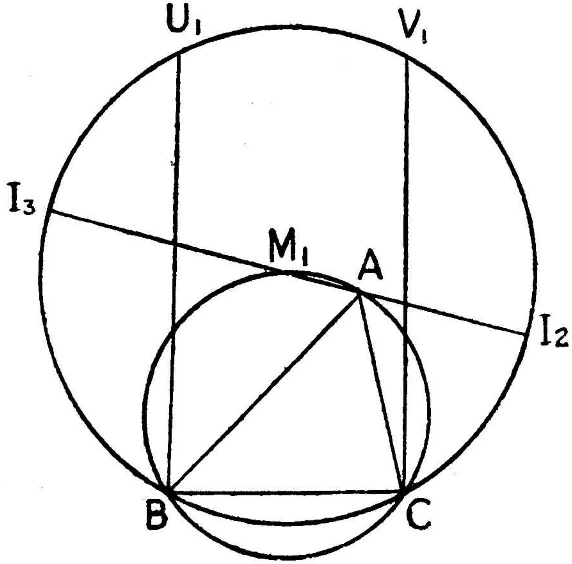
அன்றியும் $\angle I_3 BI_2 = 90^\circ$

$\therefore \quad M_1 I_2 = M_1 I_3 = M_1 B = M_1 C.$

M_1 ஓர் நிலைப்புள்ளி.

∴ I_2, I_3, M-ஐ மையமாகவும் MB-ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டநேமியிலிருக்கின்றன.

B, C வழியாக BC-க்கு வரையப்படும் குத்துக் கோடுகள் ஷெ வட்டத்தை U_1 V_1-ல் சந்திக்கட்டும்.



படம் : 8

A, B-யுடன் ஒன்றுபடுங்கால் I_2. V_2 உடனும் I_3, B உடனும் ஒன்றுபடும். A, C-யுடன் ஒன்றுபடுங்கால் I_2, C-யுடனும் I_3, U_1-உடனும் ஒன்றுபடும். ஆகவே I_2-ன் இயங்குவழி வட்ட வளைவு $V_1 I_2 C$; I_3-ன் இயங்குவழி வட்ட வளைவு $B I_3 U_1$.

பயிற்சிகள்

1. படம் 8-ல் $\triangle I_1 I_2 I_3$-ன் (i) சுற்றுமையம் (ii) கனமையம் இவைகளின் இயங்குவழி காண்க.

2. கீழ் தந்த பண்புகளுள்ள ஒரு முக்கோணம் வரைக :—

(i) ஒரு புயம், எதிர்கோணம், உள்வட்ட ஆரை.

(ii) ஒரு புயம், எதிர்கோணம், அப்புயம் உள்வட்டத்தை தொடும் புள்ளி.

(iii) ஒரு புயம், எதிர்கோணம், அப்புயத்திலிருந்து துணைமையத்தின் தூரம்.

(iv) a, A, $\triangle\ I_1 I_2 I_3$-ன் சுற்று மையம்.

3. $\triangle$ ABC-ல், B, C சுற்று மையம் S கொடுத்திருப்பின் $I_1I_2I_3$-ன் சுற்று மையம் ஒரு வட்ட நேமியிலமையும்.

இவ்வட்டத்தின் ஆரை, I-ன் இயங்குவழி வட்டத்தின் ஆரைக்குச் சமம்.

இவ்வட்டத்தின் மையமும் I-ன் இயங்குவழி வட்டத்தின் மையமும் $\triangle$ ABC-ன் சுற்று வட்டத்தின் ஓர் விட்ட முனைகளாகும்.

4. ஓர் வட்ட நேமியிலுள்ள A என்ற புள்ளியிலிருந்து மற்றோர் வட்டத்திற்கு AB, AC என்ற தொடுவரைகள் வரைந்தால் $\triangle$ ABC-ன் (i) சுற்று மையம் (ii) துணை மையம் இவைகளின் இயங்குவழி காண்க.

வ-ரை :—**நேர்வடிவொத்திருக்கும் முக்கோணங்கள் யாவும் ஓரின முக்கோணங்கள் எனப்படும்.**

தேற்றம் 5

(i) ஓரின முக்கோணங்களின் ஒரு முனை நிலைத்தும், மற்றொன்று கொடுத்ததோர் கோட்டிலமைந்தும் இருப்பின் மூன்றாவது முனையும் ஓர் நிலைக்கோட்டிலமையும்.

(ii) ஓரின முக்கோணங்களின் ஒரு முனை நிலைத்தும் மற்றொன்று கொடுத்ததோர் வட்டநேமியலமைந்தும் இருப்பின் மூன்றாவது முனையும் ஓர் வட்ட நேமியிலமையும்.

(i) படம் 9-ல். A ஓர் நிலைத்த புள்ளி; XY ஒரு நிலைக்கோடு; B, XY-ன்மேலுள்ள ஓர் புள்ளி; ABC கொடுத்த இனத்தைச்சார்ந்த ஓர் முக்கோணம்.

C-ன் இயங்குவழி ஒரு நிலைக்கோடு என்று நிரூபிப்போம்.

D, XY-ன்மேலுள்ள A-ன் வீழ்ச்சி. கொடுத்த இனத்தைச் சார்ந்த ADE என்ற முக்கோணம் வரை. ADE ஓர் நிலைத்த முக்கோணம் ஆகவே E ஓர் நிலைத்த புள்ளி. EA ஓர் நிலைக்கோடு.

நி-ம் :— $\triangle$ ABC ||| $\triangle$ ADE

$$\therefore \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

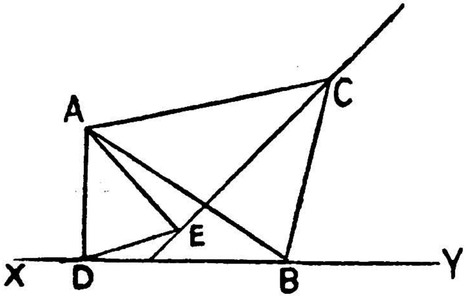
அன்றியும் $\angle EAD = \angle BAC$.

$\therefore \quad \angle DAB = \angle EAC$

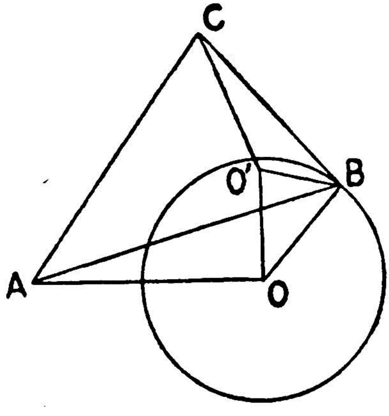
$\therefore \quad \triangle ADB \parallel\!\mid \triangle AEC$

$\therefore \quad \angle AEC = \angle ADB = 90°$

ஆகையால் EC ஒரு நிலைக்கோடு; C இக்கோட்டின்மேலிருக்கிறது.



படம்: 9



படம்: 10

(ii) படம் 10-ல், A ஓர் நிலைப்புள்ளி, O ஓர் நிலைவட்டம்; B, (O)-ன் மேலுள்ள ஓர் புள்ளி. ABC கொடுத்த இனத்தை சார்ந்த ஓர் முக்கோணம்.

C-ன் இயங்குவழி ஓர் நிலைத்த வட்டம் என்பதை நிரூபிப்போம்.

கொடுத்த இனத்தைச்சார்ந்த AOO′ என்ற முக்கோணம் வரைக, AOO′ ஒரு நிலைமுக்கோணம். ஆகவே O′ ஓர் நிலைத்த புள்ளி.

நி-ம் :— $\because \quad \triangle AOO' \parallel\!| \triangle ABC$

$$\therefore \quad \frac{AO}{AB} = \frac{AO'}{AC}$$

அன்றியும் $\angle OAO' = \angle BAC$

$$\therefore \quad \angle OAB \parallel\!| \angle O'AC$$

$$\therefore \quad \triangle AOB = \triangle AO'C$$

$$\therefore \quad \frac{O'C}{OB} = \frac{AC}{AB} = \text{நிலையெண்.}$$

$$\therefore \quad O'C = \text{நிலையெண்.}$$

ஆகவே C-ன் இயங்குவழி O'ஐ மையமாகக்கொண்ட ஓர் வட்டம்.

கி-தே : (i) தேற்றம் 5 (i)-ல், A, XY-ன் மேலிருந்தால், C-ன் இயங்குவழி A வழியாகச் செல்லும் ஓர் நிலைக்கோடு.

கி-தே : (ii) தேற்றம் 5 (i)-ல் △ ABC-ன் கனமையம், துணை மையம், நவமையம்—பொதுவாக △ ABC-ஐப் பொருத்த எல்லாப் புள்ளிகளின்—இயங்குவழிகள் நிலைக்கோடுகள்.

கி-தே : (iii) தேற்றம் 5 (ii)-ல் O, A-யுடன் ஒன்றுபடுங்கால் O'-ம் A-யுடன் ஒன்றுபடும்.

கி-தே : (iv) தேற்றம் 5 (ii)-ல் △ ABC-ஐப் பொருத்த எல்லாப் புள்ளிகளின்—அ-து. கனமையம் முதலியவைகளின் இயங்குவழிகள் நிலைவட்டங்கள்.

கி-தே : (v) தேற்றம் 5 (ii)-ல் வட்டம் (O) A வழியாகச் சென்றால், (O')-ம் A வழியாகச் செல்லும்.

பயிற்சிகள்

1. ஓர் நீண்ட சதுரத்தின் ஒரு முனை நிலைத்தும் மற்றிரு முனைகள் இரு பொது மைய வட்டங்களிலமைந்தும் இருப்பின், நான்காம் முனையும், பொது மைய வட்ட நேமியிலமையும்.

2. ஒன்றுகூடும் மூன்று கோடுகளின்மேல் முனைகள் அமையும்படியும், ஒரு புயம் நிலைத்ததோர் புள்ளி வழியாகச் செல்லும்படியும் ஒரு சம புய முக்கோணம் வரைக.

3. முனைகள் மூன்று பொது மைய வட்ட நேமிகளிலமையும்படி ஒரு சமபுய முக்கோணம் வரைக.

4. கொடுத்ததோர் முக்கோணத்திற்கு நேர்வடிவொத்தும், ஒரு முனை நிலைத்தும், மற்றிரு முனைகள் நிலைத்த இருகோடுகளின்மேலமையும்படியும் ஒரு முக்கோணம் வரைக.

5. ஓர் ஒழுங்கு n-கோணத்தின் ஒரு முனை நிலைத்தும் மற்றொன்று ஒரு நேர் கோட்டில் (வட்டநேமியில்) அமைந்தும் இருப்பின் மற்றெல்லா முனைகளும் நேர் கோடுகளில் (வட்டநேமிகளில்) அமையும்.

6. கொடுத்த புயங்களையுடைய ஒரு வட்ட நாற்கோட்டம் வரைக.

7. இருவிட்டங்களின் பொதுப்புள்ளிகள் **O, P. O** வழியாகச் செல்லும் ஒரு நாண் வட்டங்களை முறையே **Q, R**-ல் சந்தித்தால் $\triangle$ **PQR**-ன் உள்மைய இயங்குவழி ஓர் வட்டம்.

8. நிலைத்த படுகையையும் கொடுத்த பரப்பையுமுடைய முக்கோணத்தின் புயமொன்றின்மேல் வரையப்பட்ட சமபுய முக்கோண உச்சியின் இயங்குவழி காண்க.

பலவகை பயிற்சிகள்

1. $\triangle$ **ABC**-ல் **BC**, $b^2 \sim c^2$ கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் **A**-ன் இயங்குவழி **BC**-க்குக் குத்துக்கோடு.

2. கொடுத்த இருகோடுகளின்மேல் **P** என்னும் புள்ளியின் வீழ்ச்சிகள் **X, Y. PX ± PY**-யாயின், **P**-ன் இயங்குவழி காண்க.

3. ஓர் வட்டத்தின் நாண்கள் நிலைத்த ஓர் புள்ளி வழியாகச் சென்றால், அந்நாண்களின் மையப்புள்ளிகள் ஓர் வட்டநேமியிலமையும்.

4. **OX, OY** இரு நிலைக்கோடுகள் ; **A, B** முறையே **OX, OY** மேலுள்ள இருபுள்ளிகள். **AB** நிலையாயின் $\triangle$ **AOB**-ன் துணைமைய இயங்குவழி யாது ?

5. **(O)** என்ற வட்டநேமியிலுள்ள நிலைப்புள்ளிகளான **A,B**-யையும், ஓடும் புள்ளியான **C**-யையும் மூன்று முனைகளாகக்கொண்ட **ABCP** என்ற இணைகரத்தின் நான்காம் முனையான **P**-ன் இயங்குவழி ஓர் வட்டம் (O_1). (O), (O_1) இருவட்டங்களின் ஆரைகள் சமம். அன்றியும்

$$OO_1 = AB, \; OO_1 \parallel AB.$$

6. மேலே 6-ல் இணைகரம் ABPC-ன் மூலைவட்டங்களின் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவழி ஓர் வட்டம், $\triangle$ BPC-ன் கனமையத்தின் இயங்குவழி ஓர் பொது மைய வட்டம்.

7. நிலைத்ததோர் கோட்டின்மேல் மையப்புள்ளிகளைக்கொண்ட ஓர் வட்ட நாண்களின் வட்டத்தைப்பொருத்த துணைப்புள்ளிகளின் இயங்குவழி காண்க.

8. ஓர் முக்கோணத்தின் ஓர் கோணமும் அக்கோணத்தை அடுத்த இருபுயங்களின் மொத்த அளவும் கொடுத்திருப்பின் அதன் கனமையம், சுற்றுமையம், நவமையம் இவைகளின் இயங்குவழி காண்க.

9. $\triangle$ ABC-ல் $\angle$B, $\angle$C-ன் வெளிச்சமவெட்டிகள் நிலைத்த கோடுகள். BC ஓர் நிலைத்த புள்ளி வழியாகச் சென்றால் A-ன் இயங்குவழி ஓர் வட்டம்.

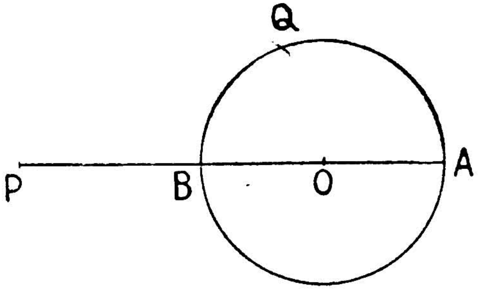
10. XY, (O) என்ற வட்டத்தின் நிலைத்த ஓர் தொடுவரை. P வட்டத்திற்கு வெளிப்புறமிருக்குமோர் புள்ளி. PT (O) விற்குத் தொடுவரை. A, XY மேலுள்ள ஏதேனுமோர் புள்ளி. PA-ன்மேல் $PA \cdot PB = PT^2$ இருக்கும்படி B என்ற புள்ளியைக் கண்டுபிடி. B-ன் இயங்குவழி, P வழியாகச் செல்லும் (O)-ஐத்தொடுமோர் வட்டம்.

அத்தியாயம் VII

மீப்பெரிதும், மீச்சிறிதும்

தொடர்ந்து மாறும் ஒரு ராசியின் மதிப்பு ஓர் நிலையில் அதன் அருகாமை நிலைகளின் மதிப்புக்களைவிட மிகையாயின், அந்நிலையில் ராசியின் மதிப்பை மீப்பெரிதென்றுப், குறையாயின் மீச்சிறிதென்றும் கூறுவோம். இவ்விரு மதிப்புகளையும் ஒருங்கே குறிப்பிடுங்கால் அவைகளை ஈறுமதிப்புகள் என்றும், அந்நிலைகளை ஈறுநிலைகள் என்றும் கூறுவோம்.

உதாரணமாக, (O) என்ற வட்டநேமியிலுள்ள Q என்ற புள்ளியிலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு வெளிப்புறமிருக்கும் P என்ற புள்ளியின் தூரம், Q, A-யுடன் ஒன்றுபடுங்கால் மீப்பெரிது; B-யுடன் ஒன்றுபடுங்கால் மீச்சிறிது.



படம்: 1

ஈறு நிலைகளைப்பற்றி கீழ்கண்ட முக்கிய விஷயங்கள் கவனிக்கத்தக்கவை :—

(1) மீப்பெரிதோர் நிலையில் ராசியின் மதிப்பு, மற்றெல்லா நிலைகளின் மதிப்புகளைவிட மிகையாகவேண்டிய அவசியமில்லை. அம்மாதிரியே, மீச்சிறியதோர் நிலையில் மற்றெல்லா நிலைகளின் மதிப்பைவிட குறைவுபடவேண்டிய அவசியமில்லை. ஏனெனில் ஈறுநிலைகளில், ராசியின் மதிப்பை அருகாமை நிலைகளின் மதிப்பிற்கே ஒப்பிடுகிறோம்.

ஒரு ராசிக்கு அநேக ஈறுநிலைகள் இருப்பது சாத்தியமே.

மீப்பெரு, மீச்சிறு நிலைகள் மாறி மாறி வரும்,

தேற்றம் 1

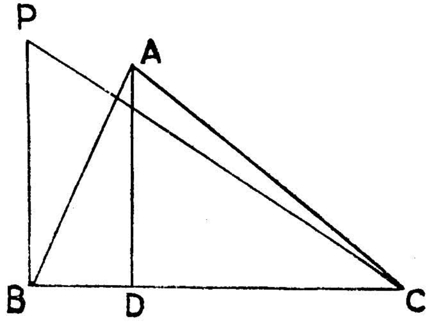
கொடுத்த இருபுயங்களைக்கொண்ட முக்கோணங்கள், அப் புயங்களைச் செங்குத்தாகக்கொண்டதே பரப்பில் மீப் பெரிது.

△ABC-ல் AB, BC, கொடுத்த அளவுகளுள்ள புயங்கள் △PBC-ல் PB, BC கொடுத்த அளவுள்ள புயங்கள். அ-து., PB = AB, அன்றியும் ∠PBC = 90°.

△PBC-யே பரப்பில் மீப்பெரிதென்று நிரூபிப்போம்.

நி-ம் :—D, BC-ன் மேலுள்ள A-ன் வீழ்ச்சி.

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} BC \cdot AD, \quad \triangle PBC = \tfrac{1}{2} BC \cdot PB.$$



படம் : 2

△ADB-ல் ∠D = 90°

∴ AD < AB

∴ AD < PB ∵ PB = AB.

∴ △ABC < △PBC.

அ-து. △PBC கொடுத்த புயங்களுள்ள மீப்பெரிய முக்கோணம்.

பயிற்சிகள்

1. கொடுத்த புயங்களையுடைய இணைகரங்களுள் நீள்சதுரமே பரப்பில் மீப்பெரிது?

2. கொடுத்த மூலைவிட்டங்களைக்கொண்ட நாற்கோட்டங்களுள், மூலைவிட்டங்களைச் செங்குத்தாகக் கொண்டதே பரப்பில் மீப்பெரிது.

3. ஒரு வட்டத்தின் மையத்தாலும் அவ்வட்டநேமியிலுள்ள இரு புள்ளிகளாலுமான முக்கோணத்தின் பரப்பு எப்பொழுது மீப்பெரிதாகும்?

தேற்றம் 2

நிலைத்த படுகையையும் கொடுத்த உச்சிக்கோணத்தையுங் கொண்ட முக்கோணங்களுள் மற்றிரு புயங்களையும் சமமாகக்கொண்டதே (i) பரப்பிலும் (ii) சுற்றளவிலும் மீப்பெரிது.

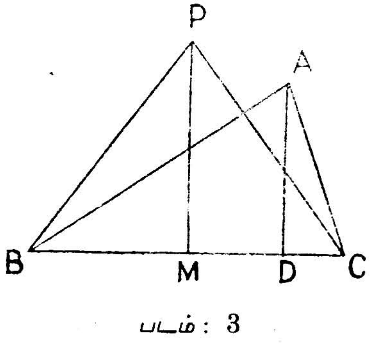
(படம் 3-ல்) BC, நிலைத்த படுகை. BC கொடுத்த கோணத்தை எதிர்வீழ்க்கும் வட்டவளைவு.

P இவ்வட்ட வளைவின் மையப்புள்ளி. A, ஏதேனுமோர் புள்ளி. D, M, BC-ன்மேல் முறையே A, P-ன் வீழ்ச்சிகள்.

(i) △ABC, △PBC கொடுத்த அம்சங்களுள்ளவை ஆனல் △PBC-ல் PB = PC.

△PBC-யே பரப்பில் மீப்பெரிதென்று நிரூபிப்போம்.

நி-ம் :—



படம் : 3

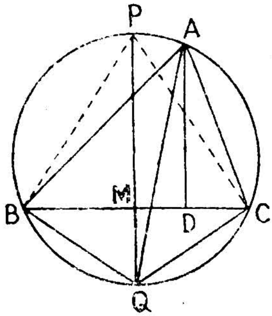
△ABC = ½ BC . AD, △PBC = ½ BC . PM.

∴ AD < PM

∴ △ABC < △PBC.

அ-து., △PBC பரப்பில் மீப்பெரிது.

(ii) படம் 4ல் $\triangle$ ABC-ன் சுற்றுவட்டத்தில் P, வழியாகச் செல்லும் விட்டத்தின் மற்ற முனை Q. ஆகவே QB = QC.



படம் : 4

$\triangle$ PBC-யே சுற்றளவில் மீப்பெரிதென்று நிரூபிப்போம்.

நி-ம் :—

A, B, C, Q ஒரே வட்டநேமியிலுள்ளவை.

$\therefore \quad AB \cdot QC + AC \cdot QB = AQ \cdot BC.$

அ-து., $(AB + AC)\, QB = AQ \cdot BC.$

அ-து., $AB + AC = AQ \cdot \dfrac{BC}{QB}.$

இவ்வண்ணமே PBQC ஒரே வட்டநேமியிலுள்ளதால்

$$PB + PC = PQ \cdot \frac{BC}{QB}.$$

ஆனால் $AQ < PQ.$

$\therefore \quad AB + AC < PB + PC.$

$\therefore \quad AB + AC + BC < PB + PC + BC.$

அ-து., $\triangle$ PBC-யின் சுற்றளவே மீப்பெரிது.

தேற்றம் 3

முனைகளைக் கொடுத்ததோர் வட்டநேமியில்கொண்ட முக்கோணங்களுள் சமபுய முக்கோணமே பரப்பிலும் சுற்றளவிலும் மீப்பெரிது.

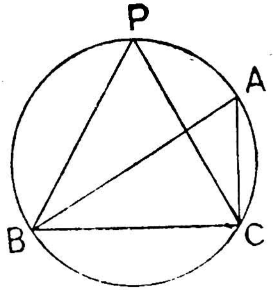
$\triangle$ ABC, முனைகளை, கொடுத்த வட்டநேமியில்கொண்ட ஓர் முக்கோணம்.

P, வட்டவளைவு BAC-ன் மையப்புள்ளி.

நி-ம் :—

ABC, PBC என்ற இரு முக்கோணங்களுக்கும் படுகையும் உச்சிகோணமும் சமம். ஆனால் △ PBC-ல் PB = PC.

ஆகவே தேற்றம் 2-ன்படி



படம் : 5

△ ABC-ஐக் காட்டிலும் △ PBC-யே பரப்பிலும் சுற்றளவிலும் மிகையாயுள்ளது.

அ-து., △ ABC-ன் புயங்கள் சமமில்லாவிடில் அதன் பரப்பையும், சுற்றளவையும்விட மிகையானதோர் முக்கோணம் இருப்பது சாத்தியம். ஆகவே பரப்பிலும் சுற்றளவிலும் மீப்பெரிய முக்கோணம் சமபுய முக்கோணமே.

பயிற்சிகள்

1. முனைகளைக் கொடுத்ததோர் வட்டநேமியில்கொண்ட n-கோணங்களில் ஒழுங்கு n-கோணமே பரப்பிலும் சுற்றளவிலும் மீப்பெரிது.

2. நிலைத்த படுகையும் கொடுத்த உச்சிகோணத்தையுங்கொண்ட முக்கோணங்களுள் மற்றிரு புயங்களினாலான நீளசதுரம் எப்பொழுது மீப்பெரிது ?

3. கொடுத்ததோர் துண்டின் நுனிகள் நிலைத்த இருகோடுகளின் மேலமைந்தால் அவைகளினாலான முக்கோணத்தின் (i) பரப்பு (ii) சுற்றளவு எப்பொழுது மீப்பெரிது ?

தேற்றம் 4

XY ஒரு நிலைக்கோடு; A, B, XY-ன் மேலமையாத இருபுள்ளிகள். P, XY-ன் மேலுள்ளதோர் புள்ளி. நிரூபி :—

(i) A, B, XY-க்கு ஒரே பக்கத்திலிருந்தால் AP + PB மீச்சிறிதாயின் ∠APX = ∠BPY.

(ii) A, B, XY-க்கு எதிர் பக்கங்களிலிருந்தால் AP ∼ BP *மீப்பெரிதாயின் ∠APX = ∠BPX.

A′, XY-ல் A-ன் பிம்பம். A′B, XY-ஐ P-ல் சந்திக்கட்டும். Q, XY-ன்மேல் ஏதேனுமோர் புள்ளி.

நி-ம் :—

△-ள் ADP, A′DP-ல்

∵ AD = DA′,

DP பொது

∠ADP = 90° = ∠A′DP.

∴ AP = A′P

அன்றியும் ∠APD = ∠A′PD.

(i) படம் 6-ல்

∵ ∠APD = ∠A′PD = ∠BPY.

∴ ∠APX = ∠BPY.

AQ + QB > AP + PB என்று நிரூபிப்போம்.

நி-ம் :—

AQ + QB = A′Q + QB (∵ AQ = A′Q)

ஆனால் △A′QB-ல்

A′Q + BQ > A′B

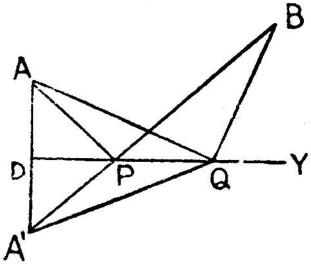
> A′P + PB

---

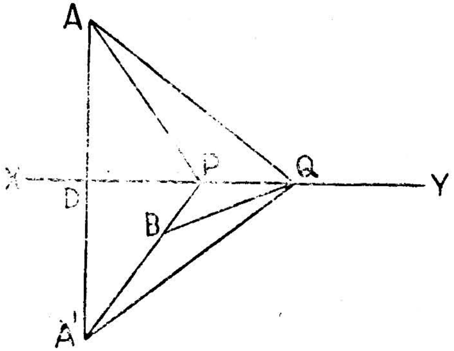
* AP ∼ BP AP-க்கும் BP-க்கும் உள்ள வித்தியாசம்.

$$> AP + PB$$

$$\therefore \quad AQ + BQ > AP + PB$$



படம் : 6



படம் : 7

(ii) *படம் 7-ல்*

$$\because \quad \angle APD = \angle A'PD = \angle BPD.$$

$$\therefore \quad \angle APX = \angle BPX.$$

$A'Q - QB < AP - PB$ என்று நிரூபிப்போம்.

நி-ம் :— $\triangle A'QB$-ல்

$$A'Q - BQ < A'B.$$

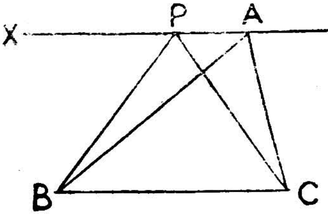
$$< A'P - BP.$$

அ-து., $< AP - BP.$

$$\therefore \quad A'Q - QB < AP - BP.$$

<u>தேற்றம் 5</u>

நிலைத்த படுகையையும் கொடுத்த பரப்பையுமுடைய முக் கோணங்களுள் மற்றிரு புயங்களையும் சமமாகக்கொண்டதே சுற்றளவில் மீச்சிறிது.



படம் : 8

ABC கொடுத்த பரப்பையுடையதும், நிலைத்த படுகை BC-ஐ யுடையதுமானதோர் முக்கோணம்.

ஆகவே A-ன் இயங்குவழி BC-க்கு இணையான XY என்ற கோடு.

XY-ன்மேல் $\angle BPX = \angle CPY$ யாகும்படி P என்ற புள்ளியைக் கண்டுபிடி.

$\triangle BPC$ கொடுத்த அம்சங்களுள்ளதும், சுற்றளவில் மீச்சிறிய முக்கோணமென நிரூபிப்போம்.

நி-ம் :— $\therefore\ XY \parallel BC$

$\therefore\ \angle BPX = \angle BPC,$

$\angle CPY = \angle PCB.$

அன்றியும் $\therefore\ \angle BPX = \angle CPY$

$\therefore\ \angle PBC = \angle PCB.$

$\therefore\ PB = PC.$

$\because\ \angle BPX = \angle CPY$

$\therefore\ PB + PC < AB + AC$ (தேற்றம் 4)

$\therefore\ PB + PC + BC < AB + AC + BC.$

பயிற்சிகள்

1. தேற்றம் 4 (i) படம் 6-ல் A, B, P ஒரு வரையினவாயின் AP ⁓ BP மீப்பெரிது. (ii) படம் 6-ல் A, B, P ஒரு வரையினவாயின் AP + PB மீச்சிறிது.

2. கொடுத்த பரப்புள்ள முக்கோணங்களுள் சமபுய முக்கோணமே மீச்சிறிய சுற்றளவுள்ளது.

3. கொடுத்ததோர் முக்கோணத்தின் புயங்களின்மேல் முனைகளைக் கொண்ட முக்கோணங்களில், அடிமுக்கோணமே மீச்சிறிய சுற்றளவுள்ளது.

4. தேற்றம் 4 படம் 6-ல் XY-யிலிருந்து A, B-ன் தூரங்கள் முறையே a, b. AB = C. நிரூபி.

(i) $AP + PB = \sqrt{c^2 + 4ab}.$

(ii) $\triangle APB = \dfrac{ab}{a+b}\sqrt{(c+a-b)(c-a+b)}.$

(iii) படம் 7-ல் $a = 8,\ b = 2,\ AB = 17$ AP ⁓ BP மீப்பெரிய மதிப்பு 15.

5. XAY என்ற கோணத்தின் புயங்களின்மேல் B, C இருபுள்ளிகளை, △ ABC கொடுத்த பரப்புடையதும் மீச்சிறிய சுற்றளவு உள்ளதுமாக இருக்கும்படி கண்டுபிடிக்க.

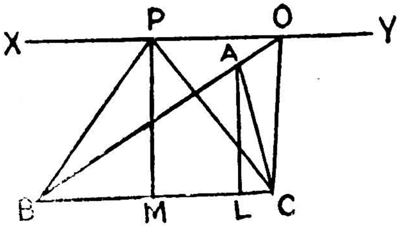
தேற்றம் 6

நிலைத்த படுகையையும் கொடுத்த சுற்றளவையுமுடைய முக்கோணங்களுள் மற்றிரு புயங்களையும் சமமாகக்கொண்டதே பரப்பில் மீப்பெரிது.

△ ABC, நிலைத்த படுகை BC-யையும் கொடுத்த சுற்றளவையுமுடையது. △ PBC அதே சுற்றளவையுடையது: அன்றியும் PB = PC.

△ PBC > △ ABC என்று நிரூபிப்போம்.

P வழியாக BC-க்கு XY என்ற இணைகோடு வரை. XY, BA-ஐ Q-ல் சந்திக்கட்டும். L, M முறையே BC மேலுள்ள A, P-ன் வீழ்ச்சிகள்.



படம்: 8

நிரூ:— $\because$ PB = PC

$\therefore \angle PBC = \angle PCB$.

அன்றியும் XY ∥ BC

$\therefore \angle BPX = \angle PBC = \angle PCB = \angle CPY$

$\therefore PB + PC < QB + QC$.

ஆனால் PB + PC = AB + AC.

$\therefore AB + AC < QB + QC$.

∴ A, BQ-விற்கு இடையிலுள்ளதோர் புள்ளி.

∴ PM > AL.

∴ △PBC > △ABC.

பயிற்சிகள்

1. கொடுத்த சுற்றளவுள்ள எல்லா முக்கோணங்களுள், சமபுய முக்கோணமே பரப்பில் மீப்பெரிது.

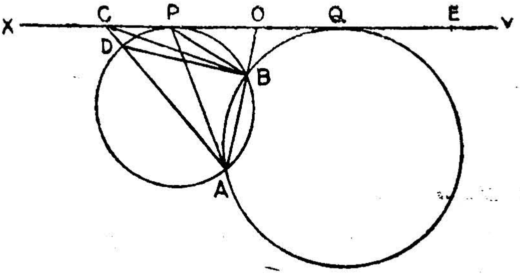
2. ஒரு இணைகரத்தின் சுற்றளவும் ஓர் கோணமும் கொடுத்திருப்பின் இவ்வமிசங்களுள்ள சாய்வு சதுரமே பரப்பில் மீப்பெரிது.

3. XAY ஓர் கோணம். AX, AY மேல் B, C என்ற இரு புள்ளிகளை △ABC கொடுத்த சுற்றளவுடையதும், மீப்பெரிய பரப்புடையதுமாகக் கண்டுபிடி.

4. சுற்றளவு 20 செ. மீ. உள்ள மீப்பெரிய முக்கோணம் வரைக.

தேற்றம் 7

ஒரு நிலைக்கோட்டின் ஒரே பக்கமுள்ள A, B என்ற இரு புள்ளிகள் அக்கோட்டின்மேலுள்ள C என்ற புள்ளியில் எதிர்வீழ்க்கும் கோணம் மீப்பெரிதாயின், △ABC ன் சுற்றுவட்டம் அந்நிலைக்கோட்டைத் தொடும்.



படம்: 9

XY நிலைக்கோடு. AB, XY-ஐ O-ல் சந்திக்கட்டும். AB வழியாகச் செல்லும் வட்டங்களில் XY-ஐத் தொடும் வட்டங்

கள் இரண்டே அவைகளின் தொடுபுள்ளிகளான P, Q O-விற்கு இருபுறத்தில் $OP^2 = OQ^2 = OA.OB$ என்ற சமீகரணத்திற்கு ஒத்த புள்ளிகள்.

XY-ல் OX என்ற பகுதியில் P-லும் OY என்ற பகுதியில் Q-லும் AB மீப்பெருங்கோணங்களை எதிர் வீழ்க்கும் என்று நிரூபிப்போம்.

OX என்ற பகுதியில் C, OX-ன் மேலுள்ள ஓர் புள்ளி. OX வட்டத்திற்குத் தொடுவரையாகையால் C வட்டத்திற்கு வெளிப்புறமிருக்கும். AC வட்டத்தை D-ல் சந்திக்கட்டும். D, AC-க்கு இடையிலுள்ள புள்ளி.

நீ-ம் :— $\angle APB = \angle ADB > \angle ACB$.

இம்மாதிரியே E, OY-ல் ஏதேனுமோர் புள்ளியானால் $\angle AQB > \angle AEB$ என்று நிரூபிக்கலாம்.

பயிற்சிகள்

1. நிலைத்த படுகையையும் கொடுத்த பரப்பையுமுடைய முக்கோணங்களுள் மற்றிரு புயங்களையும் சமமாகக்கொண்டதே மீப்பெரிய உச்சிக் கோணத்தையுடையது.

2. (O) என்ற நிலைத்த வட்டத்தை வெட்டாததோர் கோட்டின் மேலுள்ள இருபுள்ளிகள் A, B. அவ்வட்டநேமியிலுள்ள C என்ற புள்ளியில் AB எதிர் வீழ்க்கும் கோணம் (i) மீப்பெரிதாயின் ABC-ன் சுற்றுவட்டம் நிலைத்த வட்டத்திற்கு வெளித்தொடு வட்டம். (ii) மீச்சிறிதாயின் ABC-ன் சுற்றுவட்டம் நிலைத்த வட்டத்திற்கு உள்தொடு வட்டம்.

தேற்றம் 8

(i) $x+y$ கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் $x=y$ ஆகின் x^2+y^2 மீச்சிறிது, xy மீப்பெரிது.

(ii) xy கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் $x=y$ ஆகின் x^2+y^2, $x+y$ மீச்சிறிது.

(iii) x^2+y^2 கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் $x=y$ ஆகின் $x+y$, xy மீப்பெரிது.

மேலே கண்ட சர்வசாம்யங்களிலிருந்து இவைகள் எளிதில் கிடைக்கும்.

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy \qquad \text{(I)}$$

$$(x+y)^2+(x-y)^2=2\,(x^2+y^2) \qquad \text{(II)}$$

$$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy \qquad \text{(III)}$$

நீ-ம் :—

(i) I, II-லிருந்து கிடைக்கும்.

(ii) I, III ,,

(iii) II, III ,,

பயிற்சிகள்

1. கொடுத்த சுற்றளவுள்ள நீள் சதுரங்களுள், சதுரமே மீப்பெரு பரப்பையுடையது.

2. கொடுத்த பரப்புள்ள நீள் சதுரங்களுள், சதுரமே மீச்சிறிய சுற்றளவுடையது.

3. கொடுத்ததோர் சதுரத்தின் புயங்களின்மேல் முனைகளைக் கொண்ட பரப்பில் மீச்சிறிய சதுரம் வரைக. இச்சதுரத்தின் பரப்பு கொடுத்த சதுரத்தில் பாதி என்பதை நிரூபிக்க.

4. ஓர் அரை வட்டரேகையில் இரண்டு முனைகளையும், விட்டத்தில் இருமுனைகளையுங்கொண்ட மீப்பெரிய பரப்பையுடைய நீள் சதுரம் வரைக.

5. ஓர் அரை வட்டரேகையில் இருமுனைகளையும் விட்டத்தில் இரு முனைகளையுங்கொண்ட மீப்பெரு சுற்றளவுடைய நீள் சதுரம் வரைக.

6. ஓர் கால் வட்டரேகையிலுள்ள P என்ற புள்ளியிலிருந்து முனை ஆரைகளுக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகளாலும் அவ்வாரைகளாலுமான

நீள் சதுரம் பரப்பிலோ, சுற்றளவிலோ மீப்பெரிதாயின், P அவ்வட்ட நேமியின் மைய புள்ளியுடன் ஒன்றுபடும்.

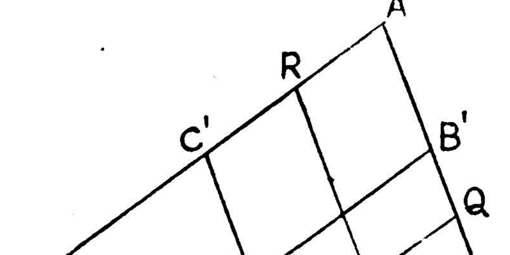
7. ஓர் வட்டத்திற்கு உட்புறமிருக்கும் P என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் ஒரு நாண் AB. AP^2+BP^2 மீச்சிறிதாயின் P, AB-ன் மையப்புள்ளி.

தேற்றம் 9

ஒரு முக்கோணத்தின் இருபுயங்களாலும், மூன்றாவது புயத்தின் மேலுள்ளதோர் புள்ளி வழியாகச் செல்லும் இப்புயங்களின் இணைகோடுகளாலுமான இணைகரத்தின் பரப்பு மீப்பெரிதாகுங்கால், அப்புள்ளி மூன்றாம் புயத்தின் மையப் புள்ளியுடன் ஒன்றுபடும்.

△ABC-ல் A′, B′, C′ முறையே BC, CA, AB-யின் மைய புள்ளிகள். P, BC-ன் மேலுள்ளதோர் புள்ளி. PQ, PR முறையே AB, AC-க்கு இணைகோடுகள்.

▱ AC′ A′B′ > ▱ ARPQ என்று நிரூபிப்போம்.



படம் : 10

நி-ம் :— $\dfrac{\square\, AA'}{\square\, AP} = \dfrac{A'C'\,.\,A'B'}{PR\,.\,PQ} = \dfrac{A'C'}{PR}\,.\,\dfrac{A'B'}{PQ}$

அன்றியும்,

$$\because \quad A'C' \parallel PR$$

$$\therefore \quad \frac{A'C'}{PR} = \frac{BA'}{BP}$$

$$\because \quad A'B' \parallel PQ$$

$$\therefore \quad \frac{A'B'}{PQ} = \frac{A'C}{PC}$$

$$\therefore \quad \frac{\square\, AA'}{\square\, AP} = \frac{BA' . A'C}{BP . PC}.$$

ஆனால் $BA' . A'C > BP . PC.$ (தேற்றம் 8 (i))

$$\therefore \quad \square\, AA' > \square\, AP.$$

பயிற்சிகள்

1. XOY என்ற கோணத்திற்கு P உட்புறமானதோர் புள்ளி P வழியாகச் செல்லும் ஒரு கோடு OX, OY-ஐ சந்திக்கும் புள்ளிகள் முறையே A, B. $\triangle OAB$ மீச்சிறிய பரப்புடையதாயின் $AP = PB$.

2. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு புயத்தின்மேல் இருமுனைகளையும், மற்றிரு புயங்களின்மேல் மற்றிரு முனைகளையும் கொண்ட மீப்பெரிய நீள் சதுரம் வரைக.

3. ஒரு சாய்ந்த சதுரத்தின் புயங்களின்மேல் முறையே நான்கு முனைகளைக்கொண்ட மீப்பெரிய நீள் சதுரம் வரைக.

சாய்ந்த சதுரத்தின் புயங்கள் 2 அங்., ஓர் கோணம் 60° ஆனால் நீள் சதுரத்தின் பரப்பு $\sqrt{3}$ ச. அங். என்று நிரூபிக்க.

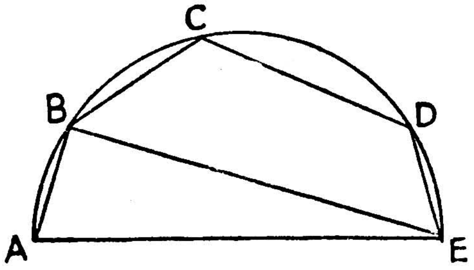
தேற்றம் 10

ஒரு புயத்தைத் தவிர மற்றெல்லாப் புயங்களும் கொடுக்கப்பட்ட பல கோணங்களுள் பரப்பில் மீப்பெரிதின் முனைகள், கொடுக்கப்படாப் புயத்தை விட்டமாக கொண்ட அரை வட்டநேமியிலமையும்.

பலகோணம் ABCDE-ல் AB, BC......DE கொடுத்த அளவுள்ளவை. AE கொடுக்கப்படா புயம்.

AB......E பரப்பில் மீப்பெரிதாயின் ∠ ABE = 90°, ∠ ACE = 90°...... ∠ ADE = 90° என்று நிரூபிப்போம்.

நி-ம் :—



படம் : 11

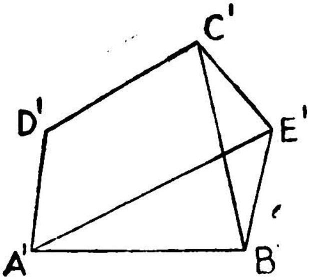
மீப்பெரிய பல கோணத்தில் ∠ ABF ஒரு செங்கோணமில்லாவிடில் BCDEF-ஐ நிலையாக வைத்து ∠ ABF-ஐ செங்கோணமாக்கின் △ ABF-ன் பரப்பும் அதனுல் பலகோணத்தின் பரப்பும் மிகைப்படும். (தேற்றம் 1) அப்படி, பலகோணத்தின் பரப்பை மிகைப்படுத்துவது சாத்தியமாயின் அது பரப்பில் மீப்பெரிது என்ற கொள்கைக்கு முற்றிலும் முரண்பாடாகும். ஆகவே ABCDE பரப்பில் மீப்பெரிதாயின் ∠ ABF-ம் அவ்வண்ணமே ∠ ACF, ... செங்கோணங்களாகும்.

தேற்றம் 11

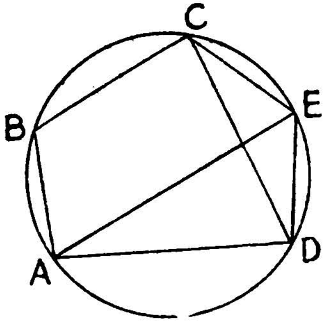
கொடுத்த புயங்களையுடைய நாற்கோட்டங்களுள் பரப்பில் மீப்பெரிதின் முனைகள் ஓர் வட்டநேமியிலமையும்.

A'B'C'D' கொடுத்த புயங்களையுடைய ஒரு நாற்கோட்டம்; ABCD அதே புயங்களையுடைய ஓர் வட்ட நாற்கோட்டம். இவ்விரு நாற்கோட்டங்களிலும் ஒத்த புயங்கள் சமம். அ-து., AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DA = D'A'.

ABCD-ன் பரப்பு A'B'C'D'-ன் பரப்பைவிட மிகையென்று நிரூபிப்போம்.



படம்: 12



படம்: 13

AE, ABCD-ன் சுற்றுவட்டத்தின் விட்டம்.

E, படம் *13*-ல் காட்டியபடி வட்டவளைவு CD-ல் இருக்கிறதாக வைத்துக்கொள்வோம். C'E', D'E' முறையே CE, DE-க்கு சமமாக இருக்குமாறு E' என்ற புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்க.

A'B'C'D' வட்ட நாற்கோட்டமல்லவாகையால் A'B'C'E,, A'D'E' என்ற பாகங்களில் இரண்டுமோ அலலது ஒன்று மட்டமோ A'E'-ஐ விட்டமாகக்கொண்ட வட்டநேமியிலமையாது?

நி-ம் :— $\because$ CD = C'D', CE = C'E', DE = D'E'.

$\therefore$ △ CDE ≡ △ C'D'E'.

பலகோணங்கள் ABCE, A'B'C'E'-ல் AB, BC, CA முறையே A'B', B'C', C'A' க்குச் சமம். அத்துடன் ABCE-ன் முனைகள் AE-ஐ விட்டமாகக்கொண்ட வட்டநேமியிலிருக்கின்றன, ஆகவே (தேற்றம் *10*-லிருந்து) ABCE-ன் பரப்பு A'B'C'E'-ன் பரப்பைவிட மிகையாகும்.

அன்றியும் முக்கோணங்கள் ADE, A'D'E'-ல் AD = A'D', DE = D'E',

அத்துடன் ∠ADE = 90°

$\therefore$ △ADE > △A'D'E',

$\therefore$ ABCED > A′B′C′E′D′

ஆனல் $\triangle$CDE > $\triangle$C′D′E′

$\therefore$ ABCD > A′B′C′D′.

தேற்றம் 11

கொடுத்த புயங்களையுடைய பல கோணங்களில் மீப்பெரி தின் முனைகள் ஓர் வட்டநேமியிலமையும்.

A, B, C, D பலகோணத்தின் ஏதேனும் நான்கு முனைகள்.

ABCD ஓர் வட்டநேமியிலமையாவிடில் ABCD-ஐத் தவிர பலகோணத்தின் மற்ற பகுதியை நிலையாக வைத்து, ABCD-க்கு பிரதியாக இதே புயங்களுள்ளதும், முனைகள் ஓர் வட்டநேமியி லமைந்ததுமான ஓர் நாற்கோட்டத்தை அமைப்பின், புதிதாக அமைந்த பலகோணத்தின் பரப்பு முந்தின பலகோணத்தின் பரப்பைக்காட்டிலும் மிகையாகும்.

ஆகவே, எந்த நான்கு முனைகளாவது ஒரே வட்டநேமியி லிராவிடில் கொடுத்த பலகோணத்தைவிட பரப்பில் மிகை யானதும் அதே புயங்களுள்ளதுமான மற்ருெரு பலகோணம் அமைப்பது சாத்தியம். ஆகவே, மீப்பெரிய பலகோணத்தின் மூன்று முனைகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டநேமியில் மற் றெல்லா முனைகளும் அமையும்.

பயிற்சிகள்

1. ஒரு மூடுபாட்டையின் சுற்றளவு கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் அப் பாட்டை வட்டமாகும்பொழுதே மீப்பெரு பரப்பை அடைக்கும்.

2. கொடுத்த பரப்பை அடைக்கும் எல்லா மூடுபாட்டைகளிலும் வட்டமே மீச்சிறிய சுற்றளவுடையது.

தேற்றம் 12

சமசுற்றளவுள்ள n-கோணங்களில் ஒழுங்கு n-கோணமே பரப்பில் மீப்பெரிது.

ABC........K கொடுத்த சுற்றளவுள்ள பரப்பில் மீப்பெரிய n-கோணம்.

நாம் நிரூபிக்கவேண்டியது. AB..........K ஒழுங்கு n-கோணம் அ-து.

(i) புயங்கள் சமம்.

(ii) முனைகள் வட்டநேமியிலமையும்.

நி-ம் :—

(i) புயங்கள் சமமில்லையேல் இரண்டு அண்டைப் புயங்களேனும் சமமாயிரா. உதாரணமாக AB, BC சமமில்லையென்று வைத்துக்கொண்டால், ACD.........K-ஐ நிலையாக வைத்துக்கொண்டு, AC-ஐப் படுகையாகவும் மற்றிரு புயங்கள் சமமானதும், △ ABC-ன் சுற்றளவுள்ளதுமான, AB′C என்ற முக்கோணம் வரைவோம்.

△ AB′C > △ ABC (தேற்றம் 6)

∴ AB′CD-ன்......K-ன் பரப்பு > ABC...K-ன் பரப்பு அன்றியும் இவ்விரண்டு n-கோணங்களும் ஒரே சுற்றளவுள்ளவை.

அ-து., புயங்கள் சமமில்லையேல், அதே சுற்றளவுள்ள பரப்பில் மிகையானதோர் n-கோணம் வரைவது சாத்தியம்

ஆகவே பரப்பில் மீப்பெரிய n-கோணத்தின் புயங்கள் சமமாயிருக்கவேண்டும்.

(ii) AB........K ஓர் வட்டநேமியிலமையாவிடில் அதே புயங்களைக்கொண்ட முனைகள் வட்டநேமியிலமைந்த n-கோணத்தின் பரப்பு இதன் பரப்பைவிட மிகையாகும். (தேற்றம் 11) ஆகவே n-கோணம் பரப்பில் மீப்பெரிதாயின் முனைகள் ஓர் வட்டநேமியிலமையவேண்டும்.

பலவகைப் பயிற்சிகள்

1. O, ஓர் வட்டத்தின் மையம்; AB ஒரு நாண்; M, AB-ன் மையம்

(i) OM + MA (ii) OM . MA, மீப்பெரிதாகும்படி AB-ஐக் கண்டுபிடி.

2. △ ABC-க்கு உட்புறமான P என்ற புள்ளியை

(i) PA + PB + PC.

(ii) $PA^2 + PB^2 + PC^2$.

மீச்சிறியதாகும்படி P-ஐக் கண்டுபிடி.

3. ABCD ஓர் நாற்கோட்டம்; $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ மீச்சிறியதாகும்படி P-ஐக் கண்டுபிடி.

4. A, B இருவட்டங்களின் சந்திப்புள்ளிகள் A வழியாகச் செல்லும் ஒரு நாண் வட்டங்களை முறையே P, Q-ல் சந்தித்தால் PQ எப்பொழுது மீப்பெரிதாகும்?

5. 4-ல் △ BPQ பரப்பில் மீப்பெரிதாயின PQ, AB-க்குக் குத்துக் கோடு.

6. 4-ல் PA . AQ மீப்பெரிதாயின் வட்டங்களுக்கு P, Q-ல் தொடுவரைகள் AB-ல் சந்திக்கும்.

7. A, B ஒரு வட்டத்திற்கு உட்புறமிருக்கும் இருபுள்ளிகள் P வட்டநேமியிலுள்ளதோர் புள்ளி; PA, PB முறையே வட்டத்தை Q, R-ல் சந்தித்தால் QR மீப்பெரிதாகுங்கால் P எங்கிருக்கும்?

8. ஒரு கோணமும் எதிர்புயத்திலிருந்து அக்கோண முனையின் தூரமும் கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணங்களுள் மற்றிரு புயங்களையும் சமமாகக்கொண்டதே (i) பரப்பிலும் (ii) சுற்றளவிலும் மீச்சிறிது.

9. புயங்கள் முறையே கொடுத்த மூன்று புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் ஓரின முக்கோணங்களில் மீப்பெரிது யாது?

10. புயங்கள் முறையே கொடுத்த மூன்று புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் சமபுய முக்கோணங்களில் மீப்பெரிது யாது?

11. முனைகளை கொடுத்த மூன்று கோடுகளின்மேல்கொண்ட ஓரின முக்கோணங்களுள் மீச்சிறிது யாது?

12. கொடுத்ததோர் வட்டத்தின் மூன்று தொடுவரைகளிலாலான முக்கோணங்களில் சமபுய முக்கோணமே பரப்பில் மீச்சிறிது.

13. ஒரு முக்கோணத்திற்கு உட்புறமிருக்கும் **P** என்ற புள்ளி வழியாக புயங்களுக்கு இணைகோடுகள் வரைந்தால் அவை முக்கோணத்தை மூன்று இணைகரங்களாகவும், மூன்று முக்கோணங்களாகவும் துண்டிக்கின்றன. இம்மூன்று முக்கோணங்களின் மொத்த பரப்பு மீச்சிறிதாயின் **P** முக்கோணத்தின் கனமையத்துடன் ஒன்றுபடுமென்பதை நிரூபிக்க.

14. கொடுத்த பரப்புள்ள n-கோணங்களுள் ஒழுங்கு n-கோணமே மீச்சிறிய சுற்றளவுள்ளது.